

# Specmurt 分析における共通調波構造の Riemann の $\zeta$ 関数を用いた逆フィルタ解析\*

小野順貴, 齊藤翔一郎, 亀岡弘和, 嵯峨山茂樹 (東大院・情報理工)

## 1 はじめに

我々は近年, 音楽音響信号の音高情報可視化を目的とした多重ピッチ解析手法として, specmurt 分析を提案している [1][2][3]。specmurt 分析の原理とは, 1) パワースペクトルの加法性, 2) 音高に依らない調波成分の構造 (共通調波構造) の仮定の下では, 対数周波数  $x = \log \omega$  軸上での多重音のパワースペクトル  $v(x)$  は基本周波数分布  $u(x)$  を入力, 共通調波構造  $h(x)$  をインパルス応答とする線形システムの入力とみなせることであり, これに基づき対数周波数軸上での  $h(x)$  の逆畳込みにより高調波成分を大幅に抑圧する処理を specmurt 分析と呼ぶ。

対象とする音響信号の調波構造は一般には未知であるため, specmurt 分析の一つの要点は共通調波構造の推定法にある。これに対し我々は, 基本周波数分布へ先見情報を非線形マッピングを用いて導入し, 共通調波構造を数値的に反復推定する手法を提案している [2]。一方, 逆フィルタの安定性や反復推定の収束性を論じるため, 共通調波構造とその逆フィルタの解析的な性質についても検討をすすめてきた。

共通調波構造は不等間隔に並ぶインパルス列でモデル化でき, 一般的にその逆フィルタの性質を論じることは困難であるが, 今回我々は, あるクラスの共通調波構造の Fourier 変換が Riemann の  $\zeta$  関数と同形になるという性質を発見した。Riemann の  $\zeta$  関数とは, 整数論の分野で重要な役割を果たしている複素関数であり, 数学的に美しい様々な性質が明らかにされている [4]。本報告では, Riemann の  $\zeta$  関数の性質を工学的に解釈することにより, 共通調波構造の逆フィルタの性質について得られた新たな知見について報告する。

## 2 パワー則に従う共通調波構造の Fourier 変換と Riemann の $\zeta$ 関数の等価性

共通調波構造  $h(x)$  として線スペクトルを仮定すると,  $h(x)$  とその Fourier 変換  $H(y)$  は,

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta(x - \log n) \quad (1)$$

$$H(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-jy \log n} \quad (2)$$

のように表される。ただし  $x$  は対数周波数,  $a_n$  は  $n$  次倍音のパワーを表す正の実数である。

specmurt 分析は,  $1/H(y)$  の逆 Fourier 変換  $h^{-1}(x)$  を畳み込むことによって行なわれるが, 一般の  $a_n$  について  $h^{-1}(x)$  の解析的表現を得るのは難しい。本稿では特に,

$$a_n = n^{-\gamma} \quad (3)$$

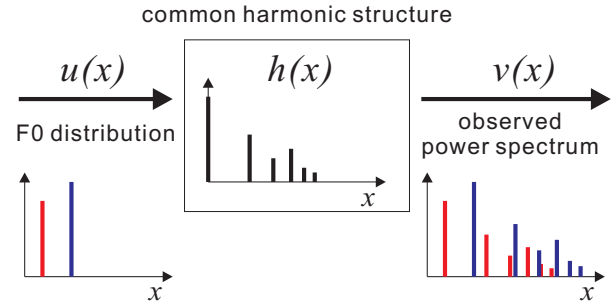


Fig. 1 基本周波数分布と共通調波構造の畳込みによる多重音スペクトル生成

と表される調波構造のクラスに着目する。これは, 調波成分のパワーが周波数の  $\gamma$  乗で減衰することを意味しており, 1) ピンクノイズ,  $1/f$  ゆらぎなど, 周波数のべき乗でパワーが変化するパワースペクトルは, 統計的な信号モデルとしてよく用いられていること, 2)  $\gamma$  を 1.0 ~ 1.5 程度に選んだ調波構造の逆フィルタは, 多くの場合, ある程度の高調波抑圧効果を有することが実験的に確認されていること [1], からも specmurt 分析において 1 つの重要なクラスになっている。以下このクラスの調波構造を, パワー則に従う調波構造と呼ぶことにする。

いま, 式 (3) を式 (2) に代入すると,

$$H(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-jy \log n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\gamma+jy}} \quad (4)$$

という表現を得る。ここで, いわゆる Riemann の  $\zeta$  関数が

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (5)$$

のように表されることに注意すると,

$$H(y) = \zeta(\gamma + jy) \quad (6)$$

の関係を得る。すなわち, パワー則に従う共通調波構造の specmurt 領域での表現は, 複素数  $s$  の実部を  $\gamma$  に固定した Riemann の  $\zeta$  関数そのものに等しいことがわかる。

## 3 パワー則に従う共通調波構造の逆フィルタの性質

### 3.1 逆フィルタの安定性

一般に周波数特性  $H(\omega)$  のシステムが逆フィルタをもつためには, 解析的には全ての  $\omega$  に対して  $H(\omega) \neq 0$  でなければならない。数値的にも  $|H(\omega)|$  がある  $\omega = \omega_0$  で小さな値をとると, 逆フィルタはその周波数に

\*Inverse Filter Analysis of Common Harmonic Structure on Specmurt by Using Riemann's  $\zeta$  function. by ONO, Nobutaka, SAITO, Shoichiro, KAMEOKA Hirokazu, and SAGAYAMA Shigeki (The University of Tokyo)

において大きなゲインを持ち、雑音やモデル化誤差に極めて敏感になる不安定性を生じる。specmurt 分析においては  $H(y) = \zeta(\gamma + jy)$  であるから、共通調波構造  $H(y)$  の逆フィルタの安定性の議論は Riemann の  $\zeta$  関数の零点分布に帰着される。

ここで Riemann の  $\zeta$  関数の零点分布については、1)  $\text{Re}[z] > 1$  においては零点をもたない、2)  $\text{Re}[z] = 1/2$  の直線上に非常に多くの零点をもつ、ことが知られている [4]。実は 2) に関しては、「 $\zeta(s)$  の自明でない零点は、全て実部が  $1/2$  の直線上に存在する」という、より強い予想がなされており、Riemann 予想と呼ばれている有名な数学の未解決問題になっている。工学的には上記 1) 2) の事実だけでも有用であり、1)  $\gamma > 1$  であれば共通調波構造は必ず逆フィルタをもつ、2)  $\gamma = 1/2$  では逆フィルタは非常に多くの極をもち不安定となることがわかる。これらの性質は、これまでの実験結果とも合致する。

### 3.2 Möbius 関数による共通調波構造逆フィルタの表現

$\text{Re}[s] > 1$  に対する Riemann の  $\zeta$  関数の逆数に関しては

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \quad (7)$$

という陽な表現が知られている。ここで  $\mu(n)$  は Möbius 関数と呼ばれ、1)  $n$  が平方数で割り切れるときには 0、2)  $n$  が相異なる  $k$  個の素因数に分解できるときには  $(-1)^k$  という値をとる。具体的には例えば  $n = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$  で  $-1$ 、 $n = 4, 8, 9, 12, \dots$  で 0、 $n = 6, 10, 14, 15, \dots$  で 1 となる。

よって  $\gamma > 1$  のパワー則に従う共通調波構造の逆フィルタのインパルス応答は

$$h^{-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-\gamma} \delta(x - \log n) \quad (8)$$

と表わされ、これは逆フィルタの陽な表現の 1 つを与えているという点で重要である。

### 3.3 Euler 積に基づく共通調波構造逆フィルタのカスケード分解

一方 Riemann の  $\zeta$  関数は  $\text{Re}[s] > 1$  のとき、

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (9)$$

のように無限積の形に因数分解することができ、Euler 積と呼ばれる。ただし  $p$  は素数  $2, 3, 5, 7, 11, \dots$  を表わす。これより  $\gamma > 1$  のパワー則に従う共通調波構造は、specmurt 領域において、

$$H(y) = \prod_p H_p(y) \quad (10)$$

$$H_p(y) = \frac{1}{1 - p^{-(\gamma + jy)}} \quad (11)$$

のように表されること、すなわち  $H_p(y)$  という部分フィルタのカスケード接続で表わされる。これは、逆フィルタのもう 1 つの陽な表現になっている。

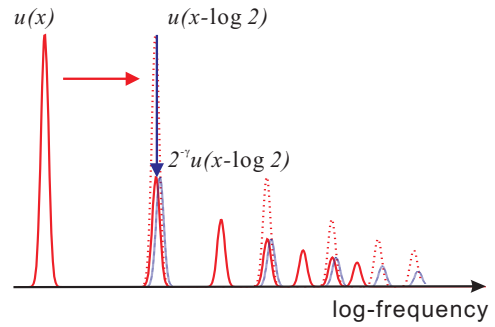


Fig. 2 部分逆フィルタ  $h_p^{-1}(x)$  の  $kp$  次高調波抑圧作用。赤で示された元のスペクトルから青で示された成分が差し引かれることにより  $kp$  次高調波 (図では  $k = 2$ ) が抑圧される

この部分逆フィルタのインパルス応答は

$$h_p^{-1}(x) = \delta(x) - p^{-\gamma} \delta(x - \log p) \quad (12)$$

であるから、観測されたパワースペクトルとの畳み込みは

$$v(x) * h_p^{-1}(x) = v(x) - p^{-\gamma} v(x - \log p) \quad (13)$$

と表わされる。対数周波数軸上での  $\log p$  のシフトは、 $k$  次高調波を  $k \cdot p$  次高調波へ重ねる意味をもつため、 $h_p^{-1}(x)$  という部分逆フィルタの作用は、大まかには  $k \cdot p$  次高調波を  $k$  次高調波パワーの定数倍 ( $p^{-\gamma}$  倍) を差し引くことにより抑圧することであると解釈でき、specmurt 分析の高調波抑圧の原理が明確化される (Fig. 2 参照)。

## 4 おわりに

本稿では、パワー則に従う共通調波構造の逆フィルタについて Riemann の  $\zeta$  関数の性質から、1)  $\gamma > 1$  では逆フィルタが必ず存在すること、2)  $\gamma = 0.5$  では逆フィルタは極を持ち不安定になること、を示し、また  $\gamma > 1$  の領域での逆フィルタの陽な表現として、無限和表現 (パラレル分解) と無限積表現 (カスケード分解) を示した。特に無限積表現においては、

$$H^{-1}(y) = \prod_p (1 - p^{-(\gamma + jy)}) \quad (14)$$

のように、部分フィルタの大きさを決定していた  $\gamma$  の項を素数  $p$  ごとに可変にすることで、より広いクラスの調波構造に対して安定な逆フィルタを構成することができる。この性質を共通調波構造逆フィルタの自動推定に応用することが今後の課題の 1 つと考えている。

謝辞 本研究の一部は科学研究費補助金・基盤研究 B (課題番号 17300054) の補助を受けて行なわれたので、ここに謝意を表する。

## 参考文献

- [1] 高橋他, 音講論 (春), pp. 691-692, 3月, 2004.
- [2] 亀岡他, 音講論 (秋), pp. 803-804, 9月, 2004.
- [3] 齊藤他, 音講論 (秋), 3-10-10, in CD-ROM, 9月, 2005.
- [4] 松本, “リーマンのゼータ関数,” 朝倉書店, 2005.