信号処理論第二
第9回 (12/ 5)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
亀岡 弘和
kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp

講義予定

- 10/03: 第1回
- 10/10: 第2回
- 10/17: 第3回
- 10/24: 第4回
- 10/31: 休講
- 11/07: 第5回
- 11/14: 第6回
- 11/21: 第7回
- 11/28: 第8回
- 12/05: 第9回
- 12/12: 第10回
- 12/19: 第11回
- 01/09: 第12回
- 01/16: 授業休止日
- 01/23: 第13回
- 01/30: 期末試験

講義内容

- δ関数再考
- δ関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

講義資料と成績評価

- 講義資料
  - http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/sp2/
- 成績評価
  - 出席点
  - 学期末試験

直交原理によるWiener-Hopf積分方程式の導出

- $\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha$ とすると，

  $E[\{s(t) - \hat{s}(t)\}x(t-\tau)] = 0$ より，

  $$E\left[\left\{s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha\right\}x(t-\tau)\right] = 0$$

  $$E[\{s(t)x(t-\tau)\}] = E\left[\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha\right\}x(t-\tau)\right]$$

  $$\therefore R_{sx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

時刻 t 以降の観測情報が使えない場合，
$\tau > 0$ という条件が必要

Wiener-Hopf積分方程式の解法 (非因果性)

- $h(t)$ が非因果的なフィルタ場合

$$R_{sx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \alpha) h(\alpha) d\alpha$$

両辺をFourier変換

$$S_{sx}(\omega) = S_{xx}(\omega) H(\omega) \longrightarrow H(\omega) = \frac{S_{sx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}$$

- $R_{sn}(\tau) = 0$ の場合

$$R_{sx}(\tau) = R_{ss}(\tau), \quad R_{xx}(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau)$$

$$H(\omega) = \frac{S_{ss}(\omega)}{S_{ss}(\omega) + S_{nn}(\omega)}$$

Wiener-Hopf積分方程式の解法 (因果性)

- $$y(\tau) = R_{sx}(\tau) - \int_0^\infty R_{xx}(\tau - \alpha) h(\alpha) d\alpha$$
  - $y(\tau) = 0 \ (\tau > 0)$ 反因果性関数(anticausal function)
  - $h(\tau) = 0 \ (\tau < 0)$ 因果性関数(causal function)

となる $y, \ h$ を見つければ良い

- y の導入により $\tau > 0$ の条件はもう考えなくて良い

Laplace変換を用いた因果性の表現

- y, h を見つける問題をLaplace変換で表現

  - y, h のLaplace変換を $Y(p), H(p)$ とすると

$$Y(p) = S_{sx}(-jp) - S_{xx}(-jp)H(p)$$

$$\begin{cases} Y(p) & \mathrm{Re}[p] < 0 \\ H(p) & \mathrm{Re}[p] > 0 \end{cases}$$

で解析的（極がない）
で解析的（極がない）

なる $Y(p), H(p)$ を見つける問題と等価

Laplace変換

- Laplace変換　（通常はf(t)=0, t<0 を考える）

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

- 逆Laplace変換

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

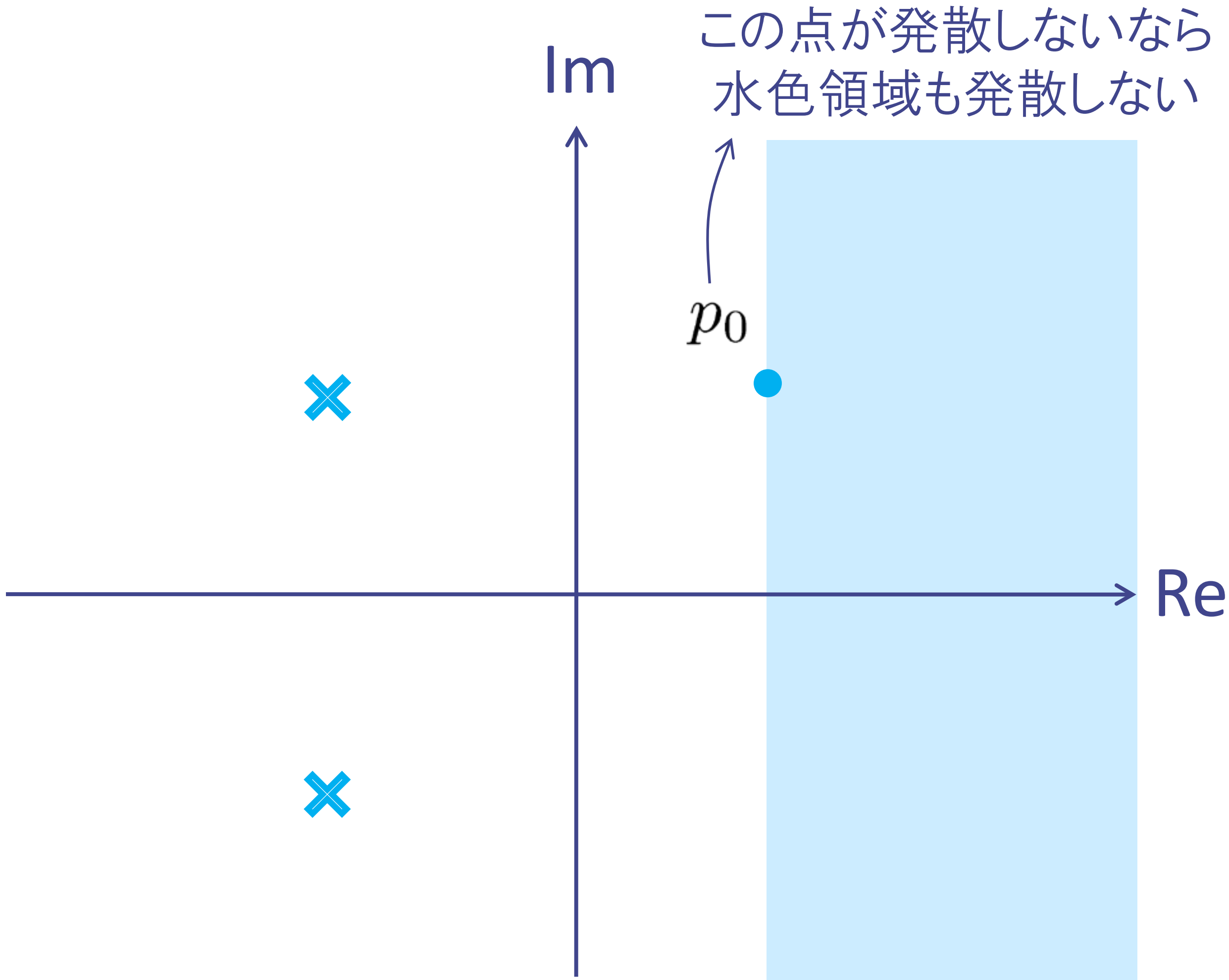
右側/左側Laplace変換

- $F(p) = F_{\text{right}}(p) + F_{\text{left}}(p)$ $\quad p = \sigma + j\omega$
  - 右側Laplace変換 $\underline{F_{\text{right}}(p)} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) \mathrm{d}t$

    因果性関数のLaplace変換
  - 左側Laplace変換 $F_{\text{left}}(p) = \int_{-\infty}^{0} e^{-pt} f(t) \mathrm{d}t$

- $p = p_0$ が右側Laplace変換の収束領域にあるならば $\mathrm{Re}(p) \geq \mathrm{Re}(p_0)$ となる p はすべて収束領域内（$F_{\text{right}}(p)$ の全ての極の実部は $\mathrm{Re}(p_0)$ より小）

右側Laplace変換の収束領域



BIBO安定性

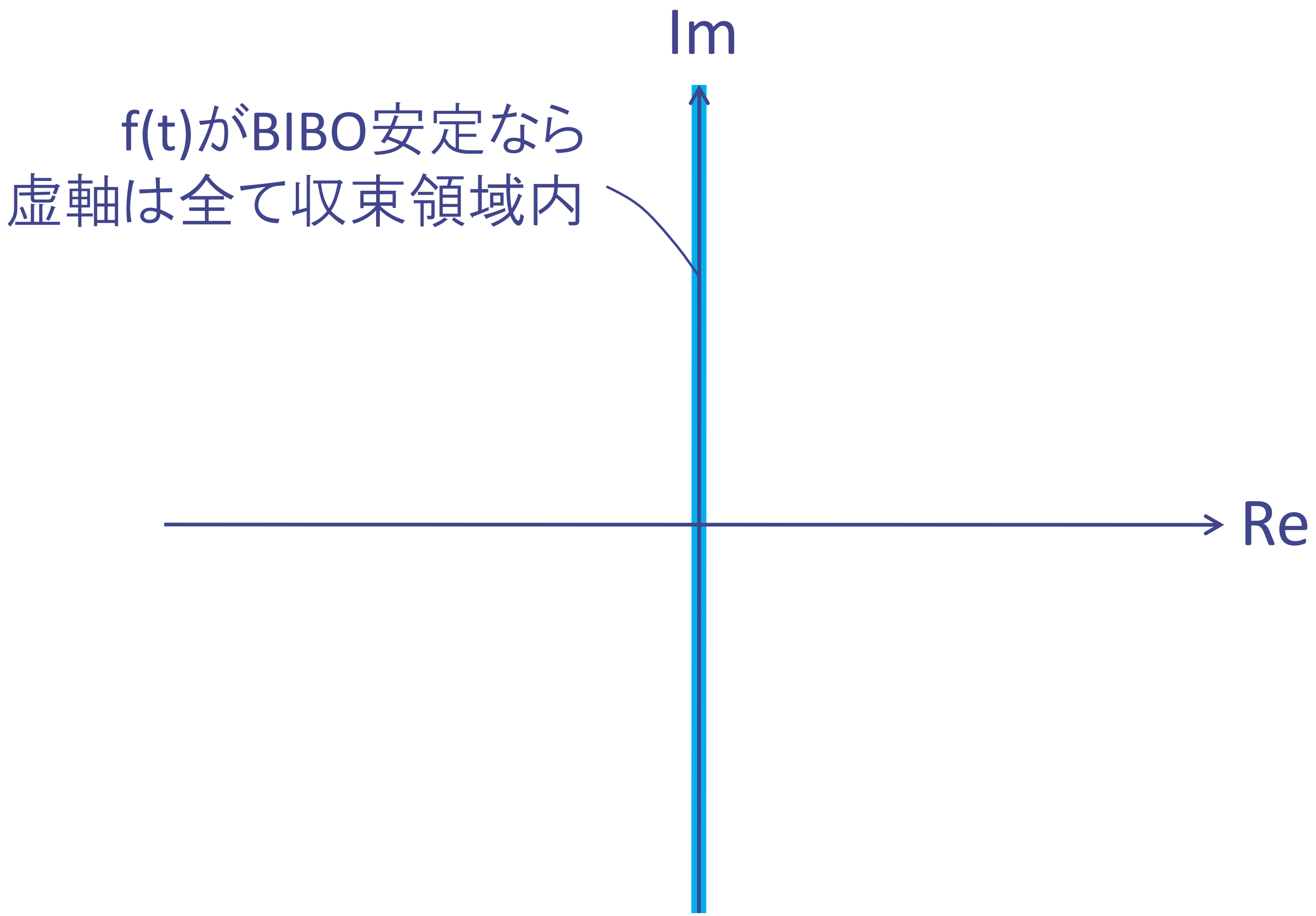
- フィルタ $f(t)$ がBIBO(Bounded Input, Bounded Output)安定であるための必要十分条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \leq C$$

- $f(t)$ がBIBO安定であれば $f(t)$ のLaplace変換の収束領域には s 平面の虚軸が含まれる

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-j\omega t} f(t)|\mathrm{d}t \leq C$$

BIBO安定性



Laplace変換と因果性

- f(t)が因果性関数ならば

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$
$$= \int_0^\infty \underline{f(t)e^{-\sigma t}}e^{-j\omega t}dt$$

p=p0で発散しないならば，Re[p]>Re[p0]となるようなpでも発散しない

- f(t)がBIBO安定ならば

$$\left|\int f(t)e^{-j\omega t}dt\right| \leq \int |f(t)e^{-j\omega t}|dt \leq C$$

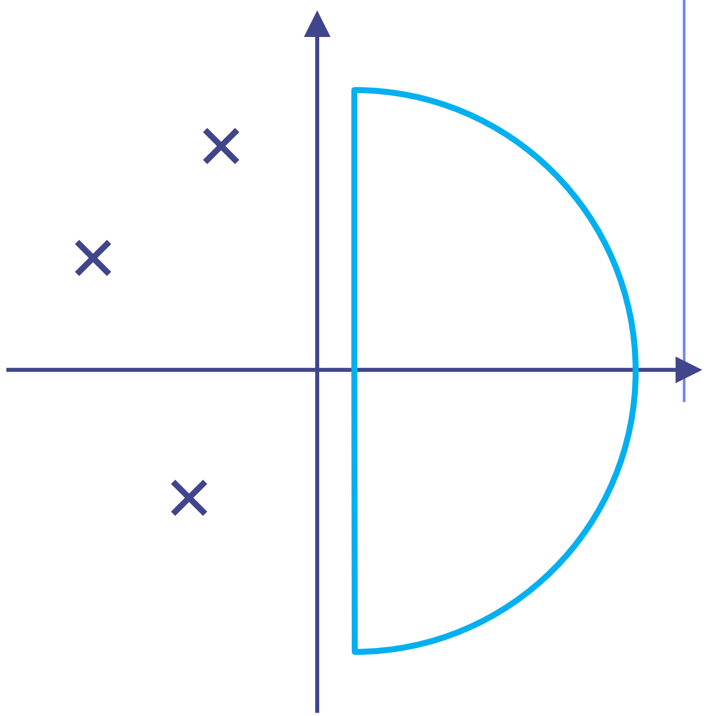
pが虚軸上にある場合F(p)は発散しない

Laplace変換と因果性

- $f(t)$がBIBO安定で因果的なフィルタであるならば、$F(p)$の極はすべて左半平面（虚軸は含まない）に存在する

Laplace変換と因果性

- F(p) が右半平面で解析的とすると, 右図の積分路に沿った積分値は0 （Cauchyの積分定理より）



$R \to \infty$ のとき $f(t)$

$$\int_{c-jR}^{c+jR} F(p)e^{pt}dp$$

$$+\int_{\pi/2}^{-\pi/2} F(Re^{j\theta})e^{Rt\cos\theta + jRt\sin\theta}Re^{j\theta}jd\theta = 0$$

- $t<0$ に対し, $R \to \infty$ のとき第二項 $\to 0$ より 第一項 $\to 0$

$$\because \lim_{R\to\infty} Re^{-R} = \lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^R} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{e^R} = 0$$

Laplace変換と因果性

- $F(p)$ が右半平面で解析的（極をもたない）ならば, $f(t)$はBIBO安定で因果的なフィルタ

W-H方程式の解法:（Ｉ）スペクトル分解

- W-H方程式: $Y(p) = S_{sx}(-jp) - S_{xx}(-jp)H(p)$

（Ｉ）$S_{xx}(-jp) = A^{+}(p)A^{-}(p)$

$$\begin{cases} A^{+}(p),\ \dfrac{1}{A^{+}(p)} : \mathrm{Re}[p] > 0 \text{ で解析的（極と零が左半平面）} \\ A^{-}(p),\ \dfrac{1}{A^{-}(p)} : \mathrm{Re}[p] < 0 \text{ で解析的（極と零が右半平面）} \end{cases}$$

スペクトル分解について

- パワースペクトル密度は偶関数

$$S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega) \longrightarrow S_{xx}(\omega) = \frac{A(\omega^2)}{B(\omega^2)}$$

$$\longrightarrow S_{xx}(-jp) = \frac{A(-p^2)}{B(-p^2)}$$

$p = a$ が根なら
$p = -a$ も根

例） $S_{xx}(-jp) = \dfrac{-p^2+1}{p^4-2p^2+4}$

分子の根： $-1, 1$
分母の根： $\pm 1.2247 \pm j0.7071$

W-H方程式の解法:（Ｉ）スペクトル分解

- $Y(p) = S_{sx}(-jp) - A^{+}(p)A^{-}(p)H(p)$

$$\therefore \frac{Y(p)}{A^{-}(p)} = \frac{S_{sx}(-jp)}{A^{-}(p)} - A^{+}(p)H(p)$$

W-H方程式の解法:（Ⅱ）部分分数分解

- $$\frac{Y(p)}{A^-(p)} = \underline{\frac{S_{sx}(-jp)}{A^-(p)}} - A^+(p)H(p)$$

極が右半平面

（Ⅱ） $$\frac{S_{sx}(-jp)}{A^-(p)} = B^+(p) + B^-(p)$$

極が左半平面

$$\begin{cases} B^+(p) & : \mathrm{Re}[p] > 0 \text{で解析的} \\ B^-(p) & : \mathrm{Re}[p] < 0 \text{で解析的} \end{cases}$$

W-H方程式の解法:（Ⅱ）部分分数分解

- $$\frac{Y(p)}{A^-(p)} = B^+(p) + B^-(p) - A^+(p)H(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Y(p)}{A^-(p)} - B^-(p)} = \boxed{B^+(p) - A^+(p)H(p)}$$

$\mathrm{Re}[p] < 0$で解析的　　　$\mathrm{Re}[p] > 0$で解析的

左辺の逆Laplace変換は反因果性関数
右辺の逆Laplace変換は因果性関数
⇒従って両辺は0ということ！

W-H方程式の解法:（Ⅲ）Hの決定,（Ⅳ）Yの決定

- $$\frac{Y(p)}{A^{-}(p)} - B^{-}(p) = 0$$

  $$B^{+}(p) - A^{+}(p)H(p) = 0$$

（Ⅲ）$H(p) = \dfrac{B^{+}(p)}{A^{+}(p)}$

$\mathrm{Re}[p] > 0$で解析的

（Ⅳ）$Y(p) = A^{-}(p)B^{-}(p)$

$\mathrm{Re}[p] < 0$で解析的

平均二乗誤差

- 以上のように $Y(p)$ を決めたときの平均二乗誤差

$$
\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\left[\left|s(t) - \int_0^\infty x(t-\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right|^2\right] \\
&= R_{ss}(0) - 2\mathbb{E}\left[s(t)\int_0^\infty x(t-\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right] \\
&\qquad\qquad + \mathbb{E}\left[\int_0^\infty\int_0^\infty x(t-\alpha)x(t-\beta)h(\alpha)h(\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right] \\
&= R_{ss}(0) - 2\int_0^\infty R_{sx}(\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha + \int_0^\infty\int_0^\infty R_{xx}(\alpha-\beta)h(\alpha)h(\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \\
&= R_{ss}(0) - 2\int_0^\infty R_{sx}(\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha + \int_0^\infty R_{sx}(\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha \\
&= R_{ss}(0) - \int_0^\infty R_{sx}(\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha
\end{aligned}
$$

因果性Wienerフィルタ設計の例

$x(t) = s(t) + n(t)$

- $S_{ss}(\omega) = \dfrac{K}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\alpha > 0)$
- $S_{nn}(\omega) = N \quad (N > 0)$
- $S_{sn}(\omega) = 0$ の場合

$\longrightarrow S_{xx}(\omega) = S_{ss}(\omega) + N, \quad S_{sx}(\omega) = S_{ss}(\omega)$

$$S_{sx}(\omega) = S_{ss}(\omega) = \frac{K}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$R_{sx}(\tau) = R_{ss}(\tau) = \frac{K}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$$

（Ⅰ）スペクトル分解

$$\boxed{S_{xx}(-jp) = A^{+}(p)A^{-}(p)}$$

$$S_{xx}(-jp) = \frac{K}{\alpha^2 - p^2} + N = \frac{K + N(\alpha^2 - p^2)}{\alpha^2 - p^2}$$

$$= N\frac{\beta^2 - p^2}{\alpha^2 - p^2} = N\frac{p+\beta}{p+\alpha}\frac{p-\beta}{p-\alpha}$$

ただし $\beta^2 = \alpha^2 + \dfrac{K}{N}$

$$\gamma \neq 0$$

$$\boxed{\therefore A^{+}(p) = \frac{N}{\gamma}\frac{p+\beta}{p+\alpha}, \quad A^{-}(p) = \gamma\frac{p-\beta}{p-\alpha}}$$

（Ⅱ）部分分数分解

$$\boxed{\frac{S_{sx}(-jp)}{A^-(p)} = B^+(p) + B^-(p)}$$

$$\frac{S_{sx}(-jp)}{A^-(p)} = \frac{-K(p-\alpha)}{(p^2-\alpha^2)\gamma(p-\beta)} = \frac{-K}{\gamma(p+\alpha)(p-\beta)}$$

$$= \frac{N}{\gamma}\left(\frac{\beta-\alpha}{p+\alpha} + \frac{\alpha-\beta}{p-\beta}\right)$$

$$\boxed{B^+(p) = \frac{N}{\gamma}\frac{\beta-\alpha}{p+\alpha}, \quad B^-(p) = \frac{N}{\gamma}\frac{\alpha-\beta}{p-\beta}}$$

（Ⅲ）Hの決定

$$\boxed{H(p) = \frac{B^+(p)}{A^+(p)}}$$

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{N}{\gamma}\frac{\beta-\alpha}{p+\alpha}\cdot\frac{\gamma}{N}\frac{p+\alpha}{p+\beta} \\ &= \frac{\beta-\alpha}{p+\beta} \end{aligned}$$

$$h(t) = (\beta-\alpha)e^{-\beta t}U(t)$$

（Ⅳ）Yの決定

$$\boxed{Y(p) = A^{-}(p)B^{-}(p)}$$

$$Y(p) = \gamma\frac{p-\beta}{p-\alpha}\cdot\frac{N}{\gamma}\frac{\alpha-\beta}{p-\beta}$$

$$= \frac{N(\alpha-\beta)}{p-\alpha}$$

(V)平均二乗誤差

$$\boxed{I = R_{ss}(0) - \int_0^{\infty} R_{sx}(t)\,h(t)\;dt}$$

$$S_{sx}(\omega) = S_{ss}(\omega) = \frac{K}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$R_{sx}(\tau) = R_{ss}(\tau) = \frac{K}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$$

(V) $E\left[|e|^2\right]$

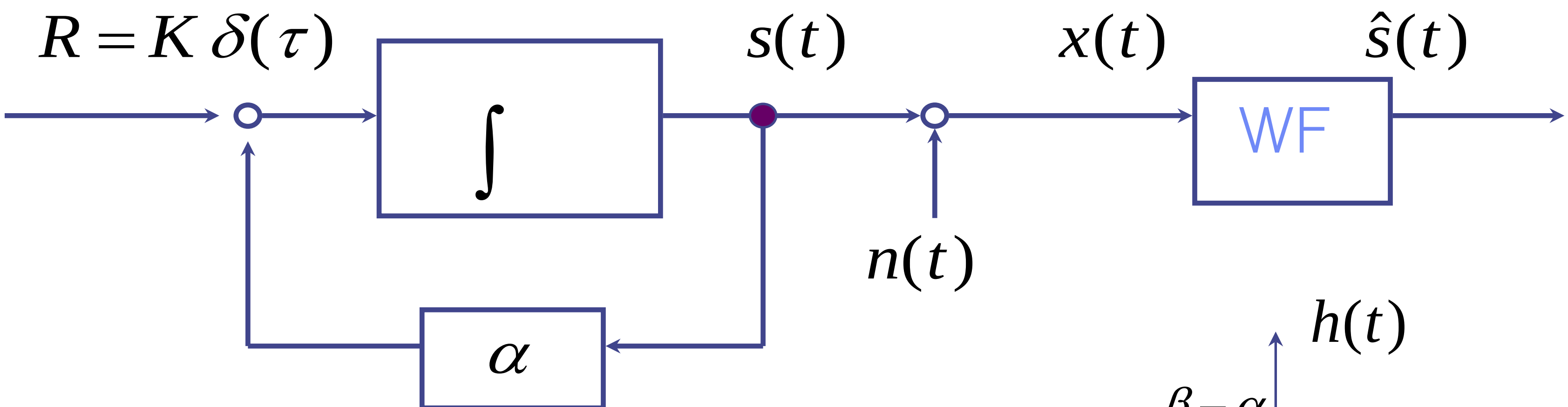
$$= \frac{K}{2\alpha} - \int_0^{\infty} \frac{K}{2\alpha} e^{-\alpha t}(\beta - \alpha)e^{-\beta t}dt$$

$$= \frac{K}{2\alpha} - \frac{K(\beta - \alpha)}{2\alpha}\frac{1}{\alpha + \beta}$$

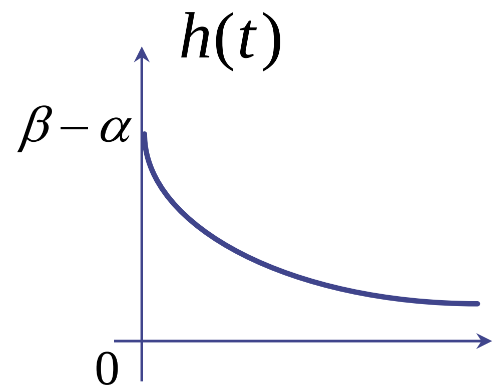
$$= \frac{K(\alpha + \beta) - K(\beta - \alpha)}{2\alpha(\alpha + \beta)} = \frac{K}{\alpha + \beta}$$

因果性Wienerフィルタ設計例のまとめ

$$S_{ss}(\omega) = \frac{K}{\alpha^2 + \omega^2} \qquad R_{ss}(\tau) = \frac{K}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$$



$$R_{nn} = N\,\delta(\tau)$$



$$\beta^2 = \alpha^2 + \frac{K}{N}$$

$$h(t) = \left(\beta - \alpha\right) e^{-\beta t}\, U(t)$$