信号処理論第二
第8回 (11/28)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
亀岡 弘和
kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp

講義予定

- 10/03: 第1回
- 10/10: 第2回
- 10/17: 第3回
- 10/24: 第4回
- 10/31: 休講
- 11/07: 第5回
- 11/14: 第6回
- 11/21: 第7回
- 11/28: 第8回
- 12/07: 第9回
- 12/12: 第10回
- 12/19: 第11回
- 01/09: 第12回
- 01/16: 授業休止日
- 01/23: 第13回
- 01/30: 期末試験

講義内容

- δ関数再考
- δ関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

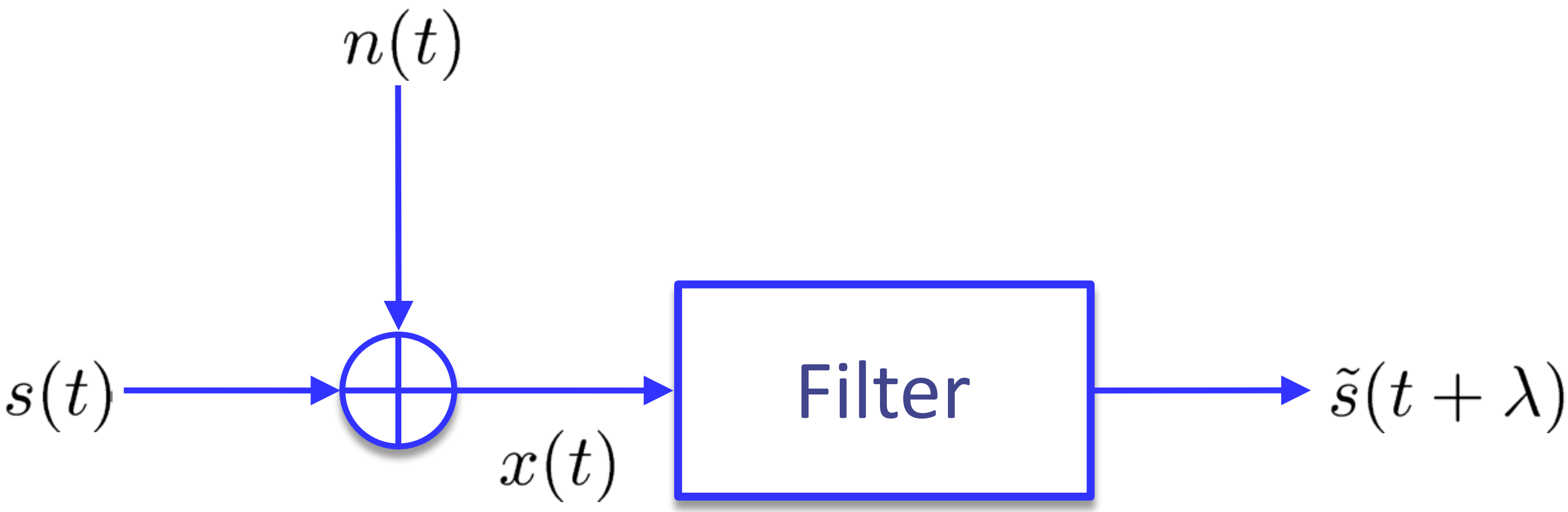
講義資料と成績評価

- 講義資料
  - http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/sp2/
- 成績評価
  - 出席点
  - 学期末試験

第7章：線形二乗平均推定とWienerフィルタ

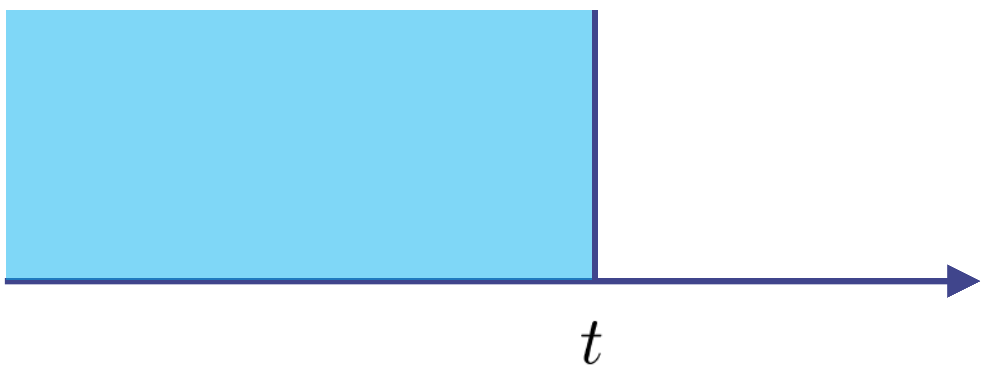
信号の推定問題

- 雑音が重畳する観測信号からどうやって信号成分を推定するか？



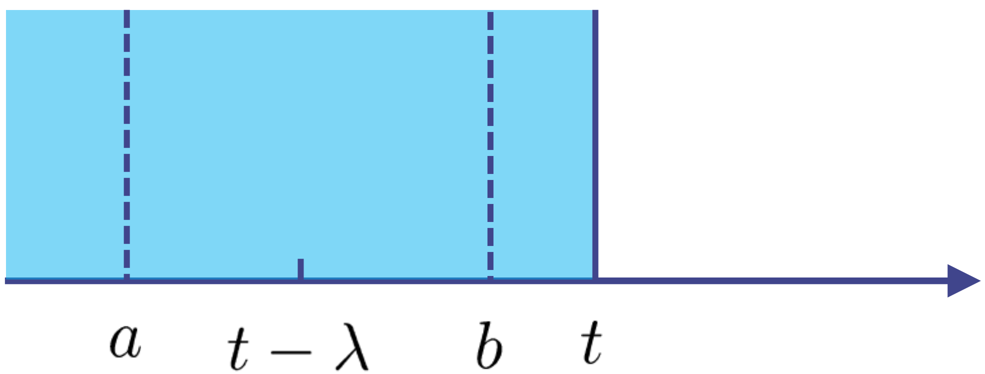
推定問題の分類1

- Filtering (濾波)　$x(t) \longrightarrow \tilde{s}(t)$
  - $(-\infty, t]$ の観測信号を用いて時刻 t の信号を推定



推定問題の分類2

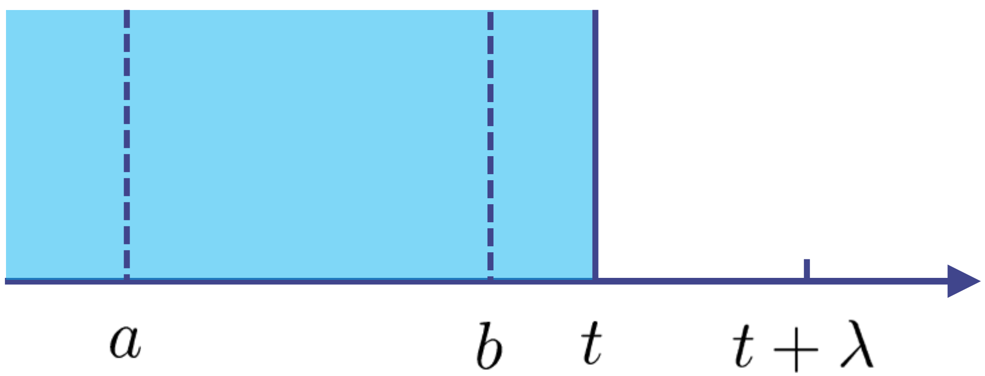
- Smoothing (平滑) $x(t) \longrightarrow \tilde{s}(t-\lambda)$
  - $(-\infty, t]$ の観測信号を用いて時刻 $t-\lambda$ の信号を推定(推定に未来の情報を利用)



- 特に, 2点 $x(a)$, $x(b)$, $(a < t-\lambda < b < t)$ から $\tilde{s}(t-\lambda)$ を推定するとき, 内挿(Interpolation)という

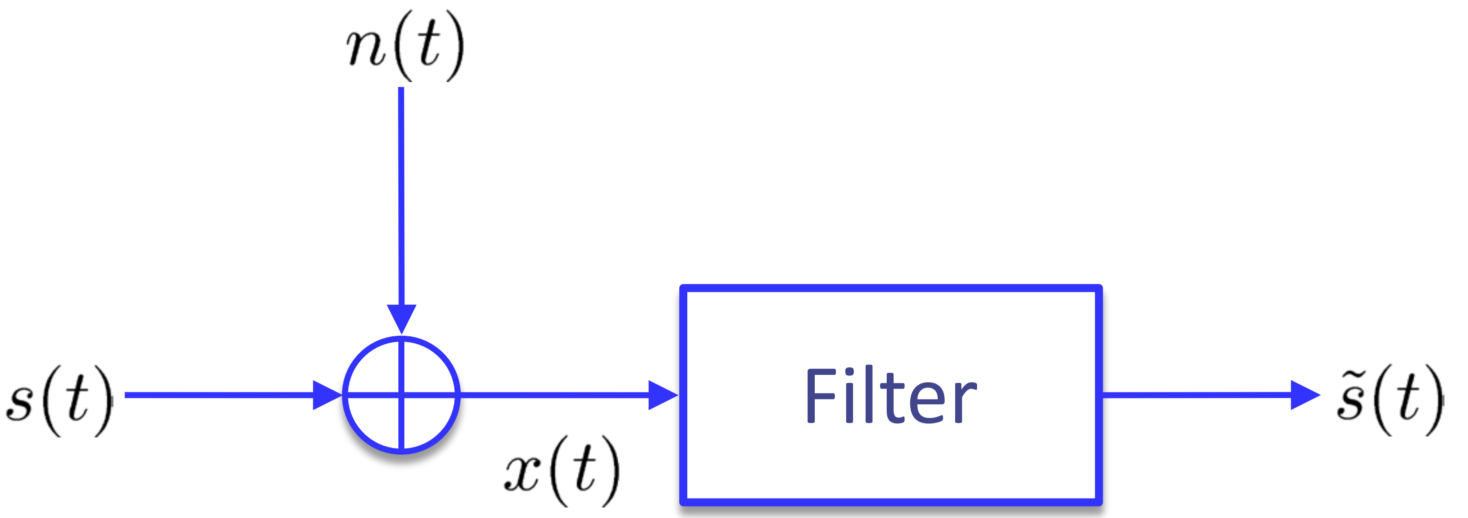
推定問題の分類3

- Prediction (予測) $x(t) \longrightarrow \tilde{s}(t+\lambda)$
  - $(-\infty, t]$ の観測信号を用いて時刻 $t+\lambda$ の信号を推定 (未来の信号を予測)



  - 特に, 2点 $x(a)$, $x(b)$, $(a < b < t < t+\lambda)$ から $\tilde{s}(t+\lambda)$ を推定するとき, 外挿(Extrapolation)という

定常確率過程に対するFiltering問題



- 推定の「良さ」を何で測るか？
  - 尤度 → 最尤推定
    (Maximum Likelihood (ML) Estimation)
  - 平均二乗誤差 → 最小平均二乗誤差推定
    (Minimum Mean Square Error (MMSE) Estimation)
- どうやって推定するか？

線形推定法

- 線形推定器

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

  - 観測データ $x(t-\tau)$ の線形結合で推定信号をモデル化

- 平均二乗誤差最小

$$J[h(t)] = \mathbb{E}[|\tilde{s}(t) - s(t)|^2]$$

  - J を最小にする $h(t)$ を求めることがここでの問題

平均二乗誤差の導出

- $$\begin{aligned} J[h] =& \mathbb{E}\left[\left|s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right|^2\right] \\ =& \mathbb{E}[|s(t)|^2] - 2\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mathbb{E}[s(t)x(t-\tau)]d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)\mathbb{E}[x(t-\tau)x(t-\sigma)]d\sigma \\ =& R_{ss}(0) - 2\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)R_{sx}(\tau)d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)R_{xx}(\tau-\sigma)d\sigma \end{aligned}$$

最適推定器の導出1: 変分法

- $h_0(t)$ が $J[h(t)]$ を最小にする条件は,
  任意の関数 $\eta(t)$ に対して

$$\left.\frac{\partial J\left[h_0(t)+\epsilon\eta(t)\right]}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=0$$

  が成立することである

平均二乗誤差の変分

- $$J[h_0+\epsilon\eta] = \mathbb{E}\left[\left|s(t) - \int_{-\infty}^{\infty}\{\underline{h_0(\tau)} + \epsilon\underline{\eta(\tau)}\}x(t-\tau)d\tau\right|^2\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\left|s(t) - \underline{\hat{s}(t)} - \epsilon\underline{f(t)}\right|^2\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[(s(t) - \hat{s}(t))^2\right]$$
$$- 2\epsilon\mathbb{E}[(s(t) - \hat{s}(t))f(t)] + \epsilon^2\mathbb{E}\left[f(t)^2\right]$$

- $$\left.\frac{\partial J[h_0+\epsilon\eta]}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = -2\mathbb{E}[(s(t) - \hat{s}(t))f(t)]$$
$$= 0$$

平均二乗誤差の変分

- $$\mathbb{E}[s(t)f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau) \underbrace{\mathbb{E}[s(t)x(t-\tau)]}_{R_{sx}(\tau)} d\tau$$

- $$\mathbb{E}[\hat{s}(t)f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau)\mathbb{E}[\hat{s}(t)x(t-\tau)]d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\sigma) \underbrace{\mathbb{E}[x(t-\tau)x(t-\sigma)]}_{R_{xx}(\tau-\sigma)} d\sigma d\tau$$

- 任意の $\eta(\tau)$ で上記が等しくなるためには・・・

参考： $g(z) = 0, \ \forall z \Leftrightarrow \int w(z)g(z)dz, \ \forall w$

Wiener-Hopfの積分方程式

- 最小二乗誤差を与えるフィルタが満たすべき条件

$$\boxed{R_{sx}(\tau) - \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \sigma) h_0(\sigma) d\sigma = 0}$$

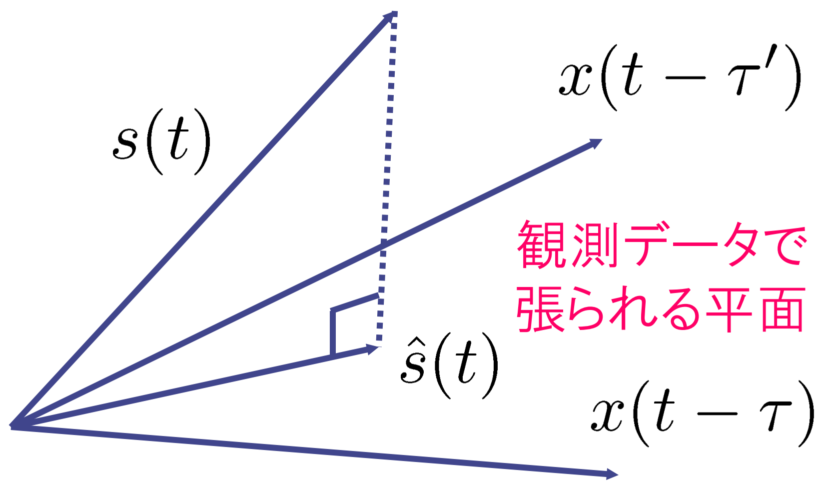
最適推定器の導出2: 直交原理

- 線形推定器　が平均二乗誤差を最小にするとき以下が成り立つ
  - 直交原理Ⅰ：誤差が観測と直交

    $$\mathbb{E}[\{s(t) - \hat{s}(t)\}x(t-\tau)] = 0$$

  - 直交原理Ⅱ：誤差が最適推定値と直交

    $$\mathbb{E}[\{s(t) - \hat{s}(t)\}\hat{s}(t)] = 0$$



離散系の直交原理

- n 個の確率変数 $s_1, s_2, \ldots, s_N$ から
  $\hat{s}_0 = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_N s_N$
  によって s_0 を推定する問題を考える

- $I = \mathbb{E}[|s_0 - \hat{s}_0|^2]$ を最小とする $a_1, a_2, \ldots, a_N$ は？

  - ただし，$n = 0, 1, \ldots, N$ に対して

$$\begin{cases} \mathbb{E}[s_n] = 0 \\ R_{nm} = \mathbb{E}[s_n s_m^*] \end{cases}$$

  とする

直交原理 I の確認 (1/2)

- $\mathbb{E}[(s_0 - \hat{s}_0)s_n^*] = 0 \quad (n = 1, \ldots, N)$
  を満足する $\hat{s}_0 = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_N s_N$ は
  $I = \mathbb{E}[|s_0 - \hat{s}_0|^2]$ を最小にするか？

直交原理 I の確認 (2/2)

- 任意の定数 $A_1, \ldots, A_N$ による推定値の誤差

$$s_0 - (\underbrace{A_1 s_1 + \cdots + A_N s_N}_{\text{直交原理を満たすとは限らない任意の線形推定値}})$$

$$= s_0 - (\underbrace{a_1 s_1 + \cdots + a_N s_N}_{\text{直交原理を満たす線形推定値}}) + (a_1 - A_1)s_1 + \cdots + (a_N - A_N)s_N$$

- $\mathbb{E}[|s_0 - (A_1 s_1 + \cdots + A_N s_N)|^2]$

$$= \mathbb{E}[|s_0 - \hat{s}_0|^2] + \mathbb{E}[|(a_1 - A_1)s_1 + \cdots + (a_N - A_N)s_N|^2]$$

$$\geq \mathbb{E}[|s_0 - \hat{s}_0|^2]$$

直交原理よりクロスターム $\mathbb{E}[(s_0 - \hat{s}_0)s_n^*]$ は0

直交原理を満たす線形推定値が平均二乗誤差最小

最適推定値の平均二乗誤差

- $\hat{s}_0$ が $E[(s_0 - \hat{s}_0)\hat{s}_0^*] = 0$ (直交原理 II)
  を満たすとき,
  $E[s_0 \hat{s}_0^*](= E[s_0^* \hat{s}_0]) = E[|\hat{s}_0|^2]$ であるから,

$$
\begin{aligned}
I &= E[|s_0 - \hat{s}_0|^2] \\
&= E[(s_0 - \hat{s}_0)(s_0^* - \hat{s}_0^*)] \\
&= E[|s_0|^2] - E[\hat{s}_0 s_0^*] - E[s_0 \hat{s}_0^*] + E[|\hat{s}_0|^2] \\
&= E[|s_0|^2] - E[|\hat{s}_0|^2] \quad \text{(ピタゴラスの定理に相当)}
\end{aligned}
$$

最適推定値の導出1

- $E[(s_0 - \hat{s}_0)s_n^*] = 0$ (直交原理 I) より
  $E[s_0 s_n^* - a_1 s_1 s_n^* - \cdots - a_N s_N s_n^*] = 0 \quad (n = 1, \cdots, N)$
  すなわち,

$$
\begin{aligned}
R_{01} &= a_1 R_{11} + \cdots + a_N R_{N1} \\
R_{02} &= a_1 R_{12} + \cdots + a_N R_{N2} \\
&\vdots \\
R_{0N} &= a_1 R_{1N} + \cdots + a_N R_{NN}
\end{aligned}
$$

最適推定値の導出2

$$\begin{pmatrix} R_{01} \\ \vdots \\ R_{0n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{1n} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{1n} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R_{01} \\ \vdots \\ R_{0n} \end{pmatrix}$$

直交原理によるWiener-Hopf積分方程式の導出

- $\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha$ とすると,

  $E[\{s(t) - \hat{s}(t)\}x(t-\tau)] = 0$ より,

  $$E\left[\left\{s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha\right\} x(t-\tau)\right] = 0$$

  $$E[\{s(t)x(t-\tau)\}] = E\left[\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha\right\} x(t-\tau)\right]$$

  $$\therefore R_{sx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

Wiener-Hopf積分方程式の解法

- $h(t)$ が非因果的なフィルタ場合

$$R_{sx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \alpha) h(\alpha) d\alpha$$

両辺をFourier変換

$$S_{sx}(\omega) = S_{xx}(\omega) H(\omega) \longrightarrow H(\omega) = \frac{S_{sx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}$$

- $R_{sn}(\tau) = 0$ の場合

$$R_{sx}(\tau) = R_{ss}(\tau), \quad R_{xx}(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau)$$

$$H(\omega) = \frac{S_{ss}(\omega)}{S_{ss}(\omega) + S_{nn}(\omega)}$$