信号処理論第二
第7回 (11/21)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
亀岡 弘和
kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp

講義予定

- 10/03: 第1回
- 10/10: 第2回
- 10/17: 第3回
- 10/24: 第4回
- 10/31: 休講
- 11/07: 第5回
- 11/14: 第6回
- 11/21: 第7回
- 11/28: 第8回
- 12/07: 第9回
- 12/12: 第10回
- 12/19: 第11回
- 01/09: 第12回
- 01/16: 授業休止日
- 01/23: 第13回
- 01/30: 期末試験

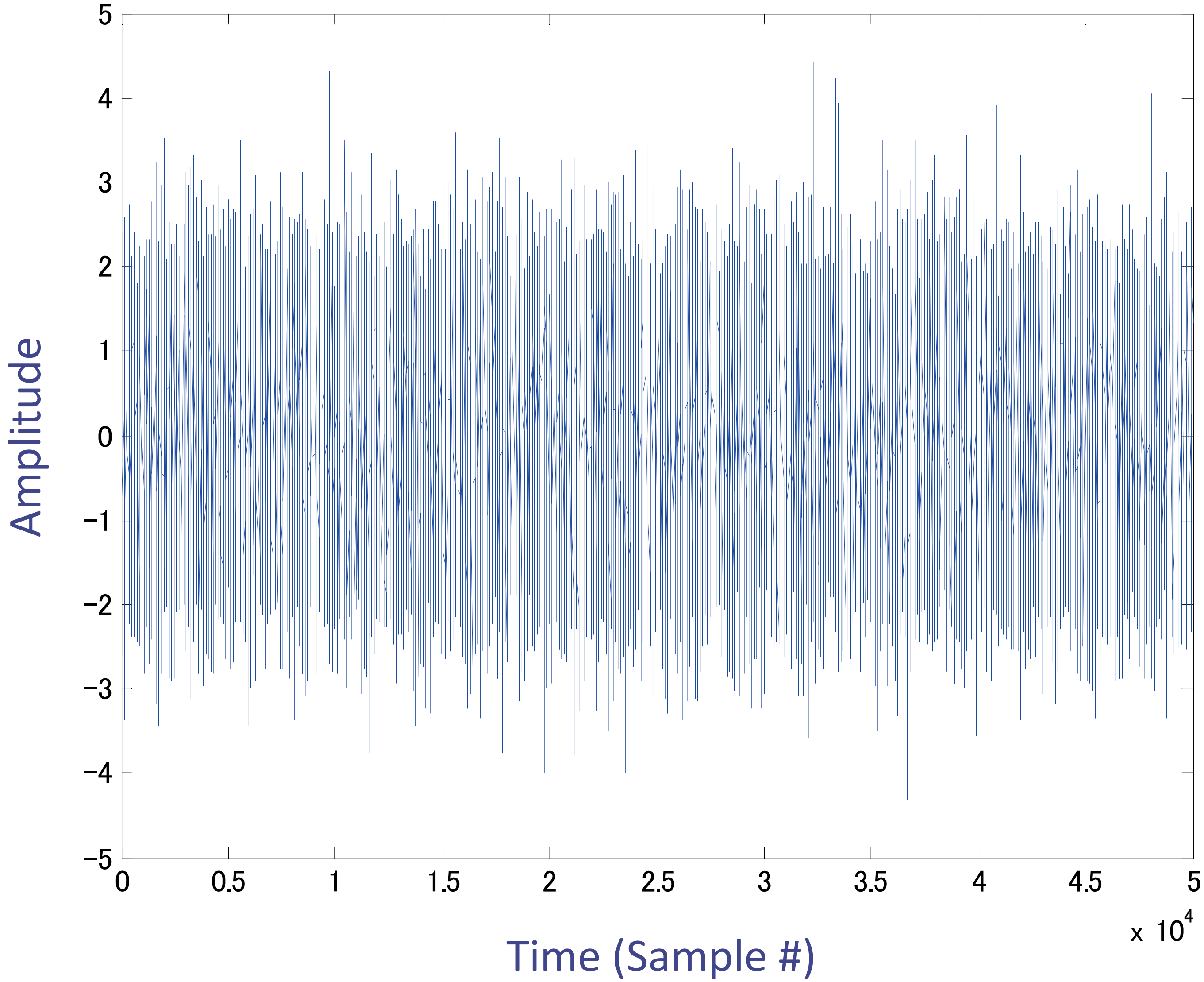
講義内容

- δ関数再考
- δ関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

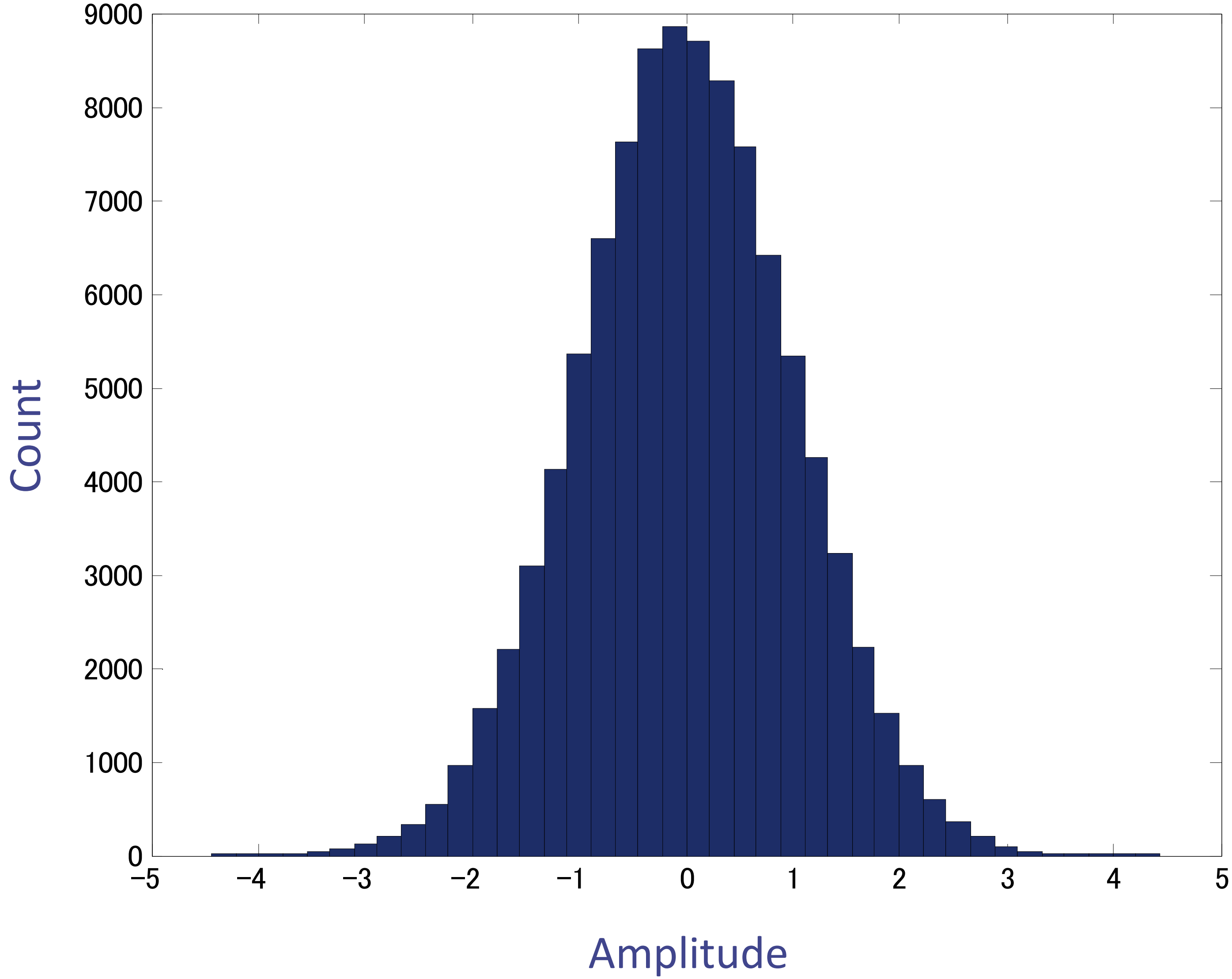
講義資料と成績評価

- 講義資料
  - http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/sp2/
- 成績評価
  - 出席点
  - 学期末試験

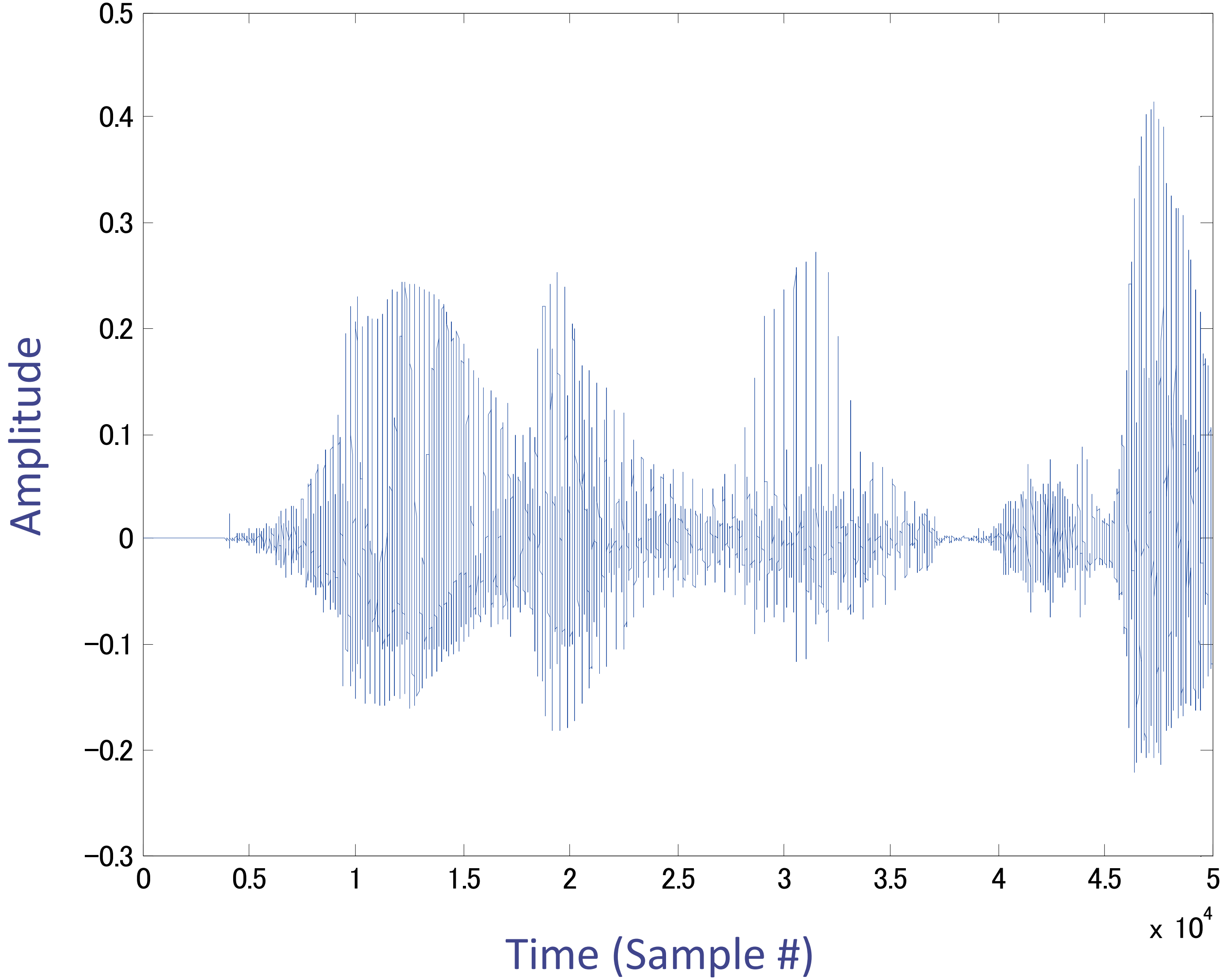
不規則信号の例1: ガウス性信号



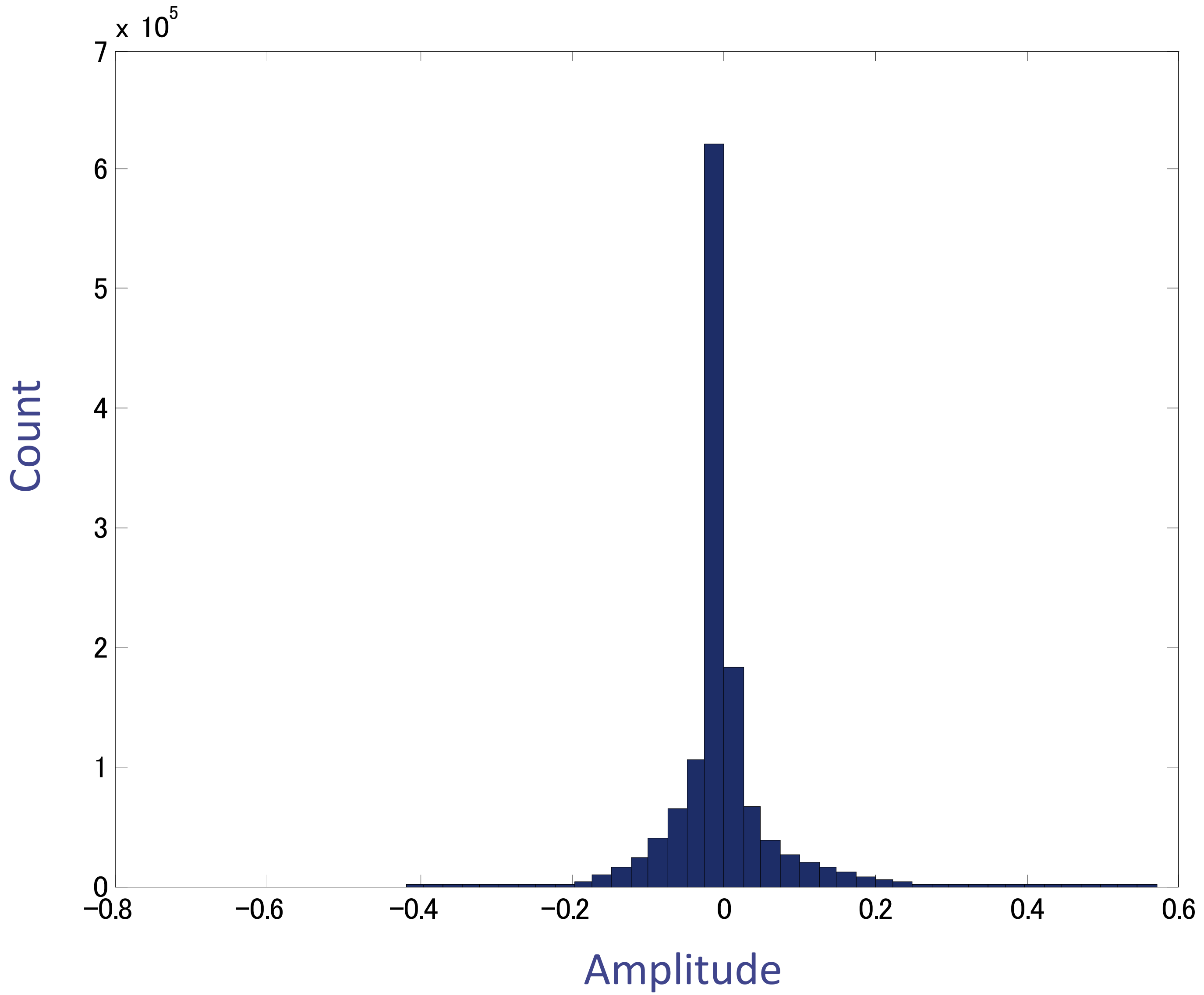
不規則信号の例1: ガウス性信号



不規則信号の例2: 朗読音声

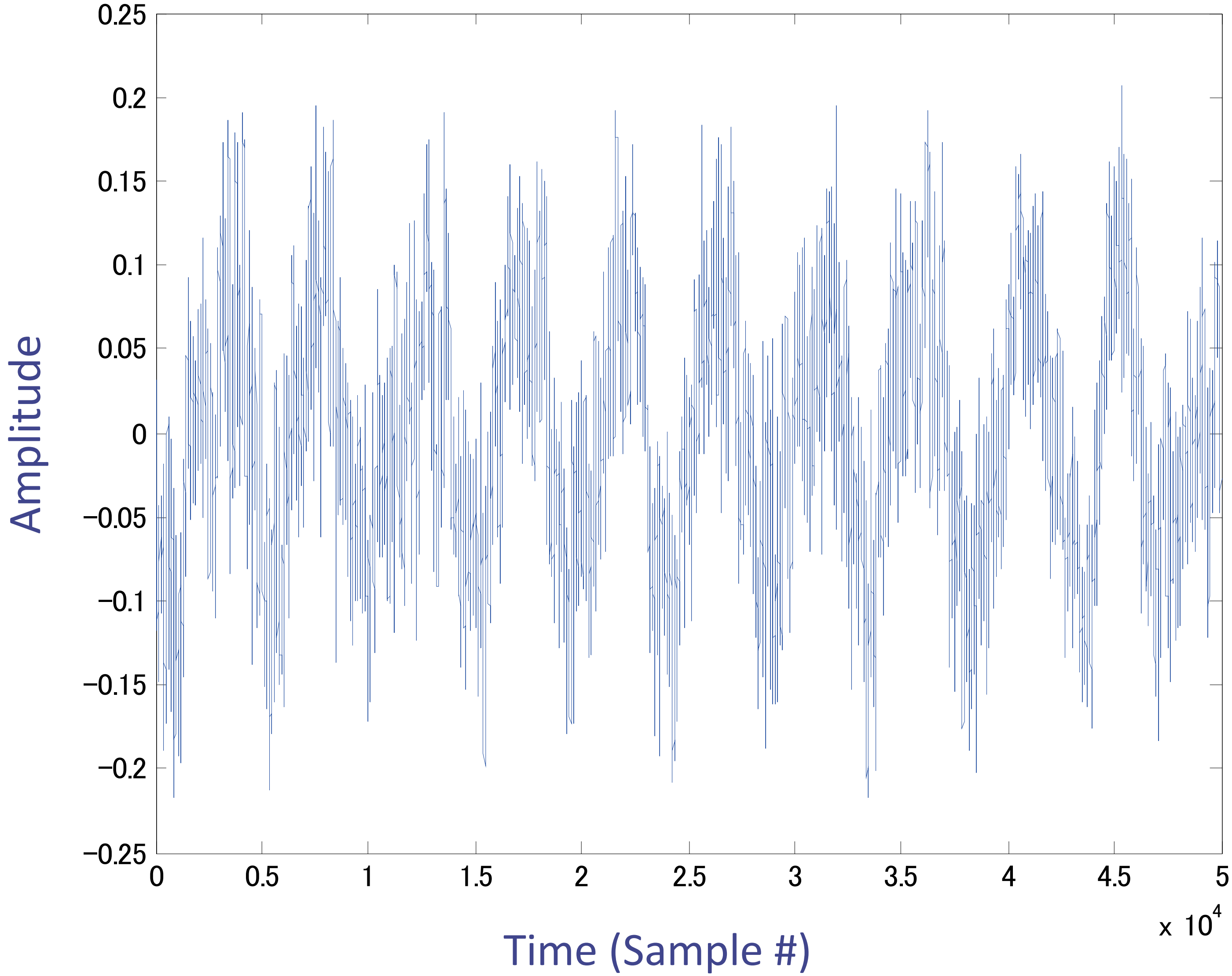


不規則信号の例2: 朗読音声

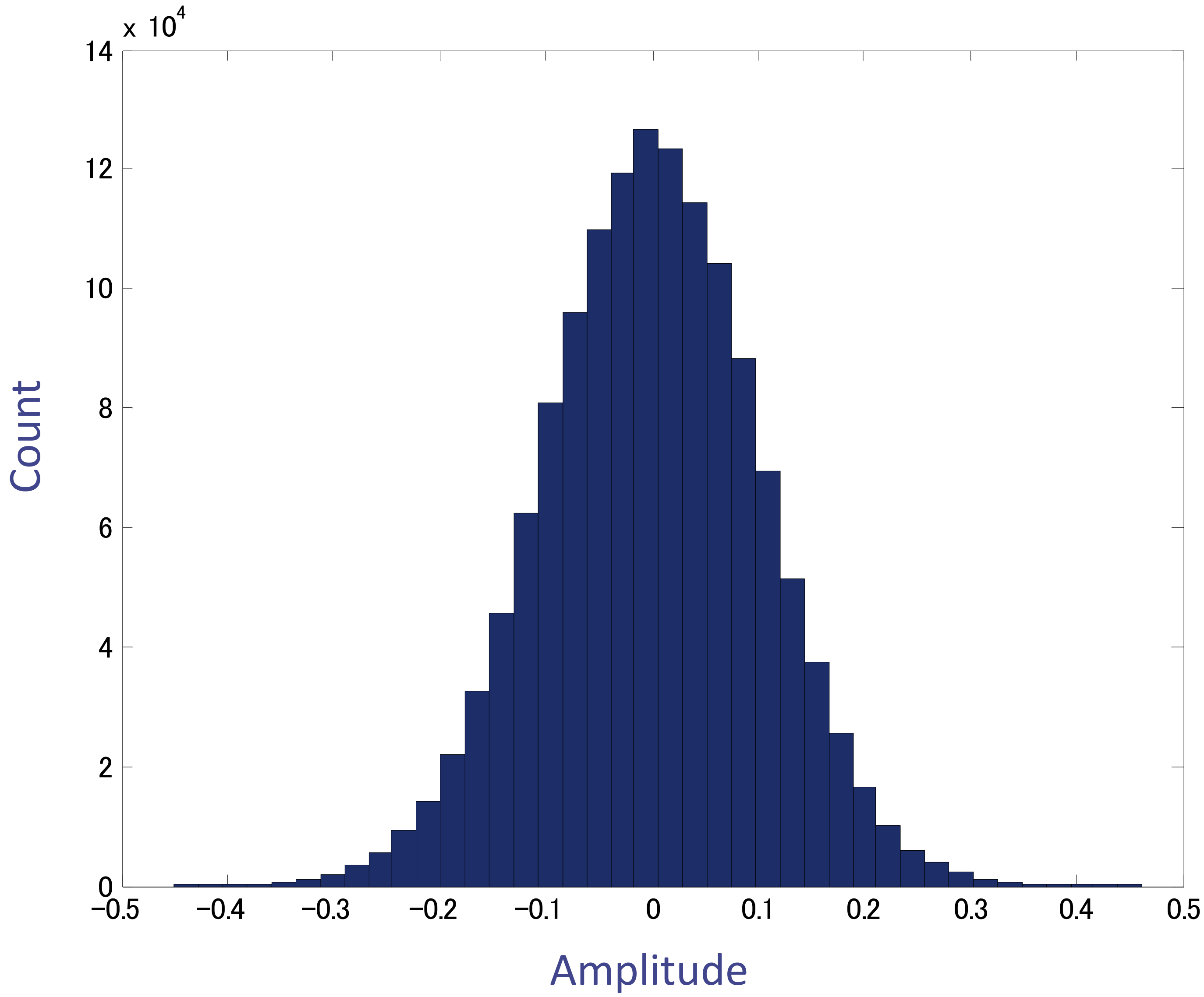


不規則信号の例3: 雑踏での雑音

不規則信号の例3: 雑踏での雑音



不規則信号の例3: 雑踏での雑音



周期的な不規則信号1

- 以下のように周期的な(Fourier級数展開可能な)自己相関関数をもつ不規則信号$x(t)$を考える

$$R(\tau + T) = R(\tau),\ \forall \tau$$

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 \tau}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_0^T R(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} \mathrm{d}\tau$$

- このとき以下が成り立つ
  - $x(t)$もFourier級数展開できる
  - $x(t)$の次数の異なるFourier係数は互いに無相関となる

周期的な不規則信号2

- $x(t)$ の時刻 $[0,T]$ の区間を用いて a_n を

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(u)e^{-jn\omega_0 u}\mathrm{d}u$$

とする。このとき,

$$\mathbb{E}\left[\left|x(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}\right|^2\right] = 0$$

となることを示す。

- ただし, $\mathbb{E}[x(t)] = 0$ とする。よって, $\mathbb{E}[a_n] = 0$ 。

周期的な不規則信号のFourier級数展開1

- $$\mathbb{E}\left[\left|x(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}\right|^2\right]$$
  $$= \mathbb{E}\left[|x(t)|^2\right]$$
  $$- \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\left[a_n^* x(t)\right] e^{-jn\omega_0 t}$$
  $$- \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\left[a_n x^*(t)\right] e^{jn\omega_0 t}$$
  $$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[a_k a_n^*] e^{j(k-n)\omega_0 t}$$

周期的な不規則信号のFourier級数展開2

- 第二項(または第三項)の計算
  - $a_n^* = \frac{1}{T}\int_0^T x^*(u)e^{jn\omega_0 u}\mathrm{d}u$ より

$$\mathbb{E}[a_n^* x(t)] = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}[x(t)x^*(u)]e^{jn\omega_0 u}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T R(t-u)e^{jn\omega_0 u}\mathrm{d}u$$

$\tau = t - u$ →

$$= \alpha_n e^{jn\omega_0 t}$$

周期的な不規則信号のFourier級数展開3

- 第四項の計算
  - $$\mathbb{E}[a_k a_n^*] = \begin{cases} \alpha_n & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}$$

$$\because \quad \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}[a_n^* x(u)] e^{-jk\omega_0 u} \mathrm{d}u$$

$$= \frac{\alpha_n}{T}\int_0^T e^{-j(k-n)\omega_0 u} \mathrm{d}u$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[a_k a_n^*] e^{j(k-n)\omega_0 t} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$$

周期的な不規則信号のFourier級数展開4

- 自己相関関数と展開係数の総和
  - $$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0\tau}$$

    $$\therefore R(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n$$

  - 自己相関関数の性質より $R^*(\tau) = R(-\tau)$ なので

    $$R(-\tau) = R^*(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^* e^{-jn\omega_0\tau}$$

    $$\therefore R(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^*$$

周期的な不規則信号のFourier級数展開5

- $$\mathbb{E}\left[\left|x(t)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{jn\omega_0 t}\right|^2\right]$$

$$= R(0) - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{jn\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n^* e^{-jn\omega_0 t}e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n$$

$$= R(0) - R(0) - R(0) + R(0)$$

$$= 0$$

Karhunen–Loève (KL) 展開

- $x(t)$ が周期信号の場合

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}$$

  - $e^{jn\omega_0 t}$ は関数系として互いに直交
  - 展開係数 a_n も確率的に互いに直交（無相関）
- $x(t)$ が一般の信号の場合

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \phi_n(t)$$

  - $\phi_n(t)$ は関数系として互いに直交，
    展開係数 b_n も確率的に互いに直交（無相関）となる
    表現をKarhunen–Loève (KL) 展開という