

信号処理論第二 第6回 (11/14)

情報理工学系研究科システム情報学専攻

亀岡 弘和

kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp

講義予定

- 10/03: 第1回
- 10/10: 第2回
- 10/17: 第3回
- 10/24: 第4回
- 10/31: 休講
- 11/07: 第5回
- 11/14: 第6回
- 11/21: 第7回
- 11/28: 第8回
- 12/07: 第9回
- 12/12: 第10回
- 12/19: 第11回
- 01/09: 第12回
- 01/16: 授業休止日
- 01/23: 第13回
- 01/30: 期末試験

講義内容

- δ 関数再考
- δ 関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

講義資料と成績評価

- 講義資料

- <http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/sp2/>

- 成績評価

- 出席点
- 学期末試験

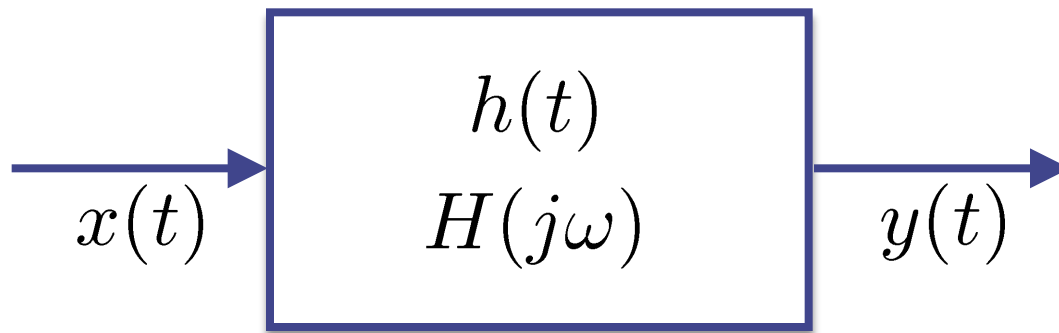
前回の復習

- 不規則信号の導入
 - 確率密度関数
 - 集合平均、自己／相互相関、自己／相互共分散
 - 強定常、弱定常、時間平均、エルゴード性
- ウィーナー・ヒンチン (Wiener-Khinchin) の定理
 - 自己相関関数のFourier変換はパワースペクトル密度
⇔パワースペクトル密度の逆Fourier変換は自己相関関数
 - 相互相関関数のFourier変換はクロススペクトル密度
⇔クロススペクトル密度の逆Fourier変換は相互相関関数
- 窓関数
 - 信号を有限区間切り出して分析するのに用いられる
(非定常な信号でも短い区間において定常と仮定できる場合が多い)
 - 窓関数をかけることは、元の自己相関関数にラグ窓を乗じることに相当／
元のパワースペクトル密度にスペクトル窓を畳み込むことに相当
 - さまざまな窓関数の紹介

The slide features a minimalist design with blue lines and corner markers. A vertical line on the left and a horizontal line at the top intersect at the top-left corner, with a small blue circle at their intersection. Another horizontal line is positioned below the main text. A vertical line on the right and a horizontal line at the bottom intersect at the bottom-right corner, also with a small blue circle at their intersection.

第4章： 線形システム

線形システム



$h(t)$: インパルス応答 (impulse response)

$H(p)$: 伝達関数 (transfer function) $h(t)$ のラプラス変換

($H(j\omega)$): システム関数, 周波数応答)

線形システムの出力

- $$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \alpha)h(\alpha) d\alpha$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)h(t - \alpha) d\alpha$$
$$= x(t) * h(t)$$

因果律 (causality)

- 物理的に実現可能なシステムにおいて、インパルス応答は、

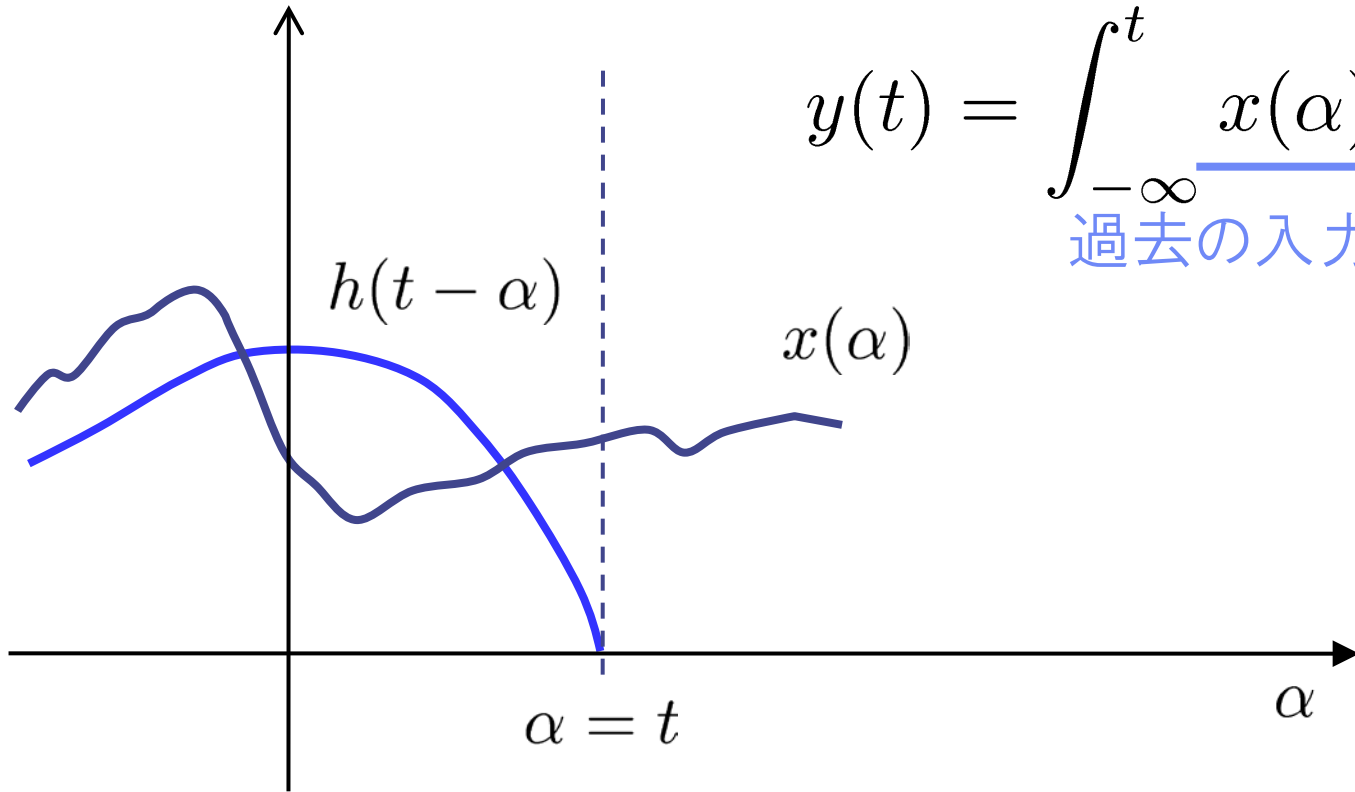
$$h(t) = 0 \quad (t < 0)$$

である。この性質を因果律 (causality) と呼ぶ。

- 因果律が満たされるとき、

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} x(t - \alpha)h(\alpha)d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^t x(\alpha)h(t - \alpha)d\alpha \end{aligned}$$

因果律を満たすシステムの出力



$$y(t) = \int_{-\infty}^t \underbrace{x(\alpha)}_{\text{過去の入力}} \underbrace{h(t-\alpha)}_{\text{重み}} d\alpha$$

因果律: 出力が未来の入力には依存しない

出力の平均値について

- 入力 $x(t)$ が定常であると仮定すると、出力 $y(t)$ の平均値は、

$$\begin{aligned}\eta_y &= \mathbb{E}[y(t)] = \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t - \alpha)d\alpha \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \underline{\mathbb{E}[x(t - \alpha)]} d\alpha \\ & \qquad \qquad \qquad = \eta_x \text{ (定常性より)} \\ &= \eta_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)d\alpha \\ &= \eta_x H(0)\end{aligned}$$

入出力の相関関数とパワースペクトル1

- インパルス応答が $h(t)$ のシステムへの入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ との相互相関関数は,

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= \mathbb{E}[y(t + \tau)x^*(t)] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau - \alpha)h(\alpha)d\alpha \right) x^*(t) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[x(t + \tau - \alpha)x^*(t)]h(\alpha)d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \alpha)h(\alpha)d\alpha \\ &= R_{xx}(\tau) * h(\tau) \end{aligned}$$

入出力の相関関数とパワースペクトル2

- 同様に, 出力の自己相関関数は,

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= \mathbb{E}[y(t + \tau)y^*(t)] \\ &= \mathbb{E}\left[y(t + \tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t - \alpha)h^*(\alpha)d\alpha\right)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[y(t + \tau)x^*(t - \alpha)]h^*(\alpha)d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau + \alpha)h^*(\alpha)d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau - \beta) * h^*(-\beta)d\beta \\ &= R_{yx}(\tau) * h^*(-\tau) \end{aligned}$$

入出力の相関関数と系の伝達特性の関係

- $R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau)$

$$\leftrightarrow S_{yx}(\omega) = S_{xx}(\omega)H(j\omega)$$

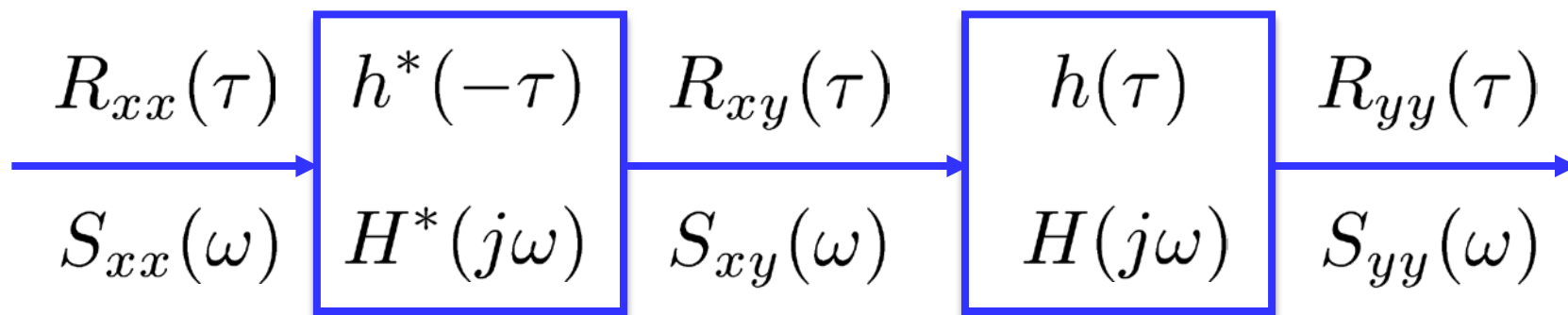
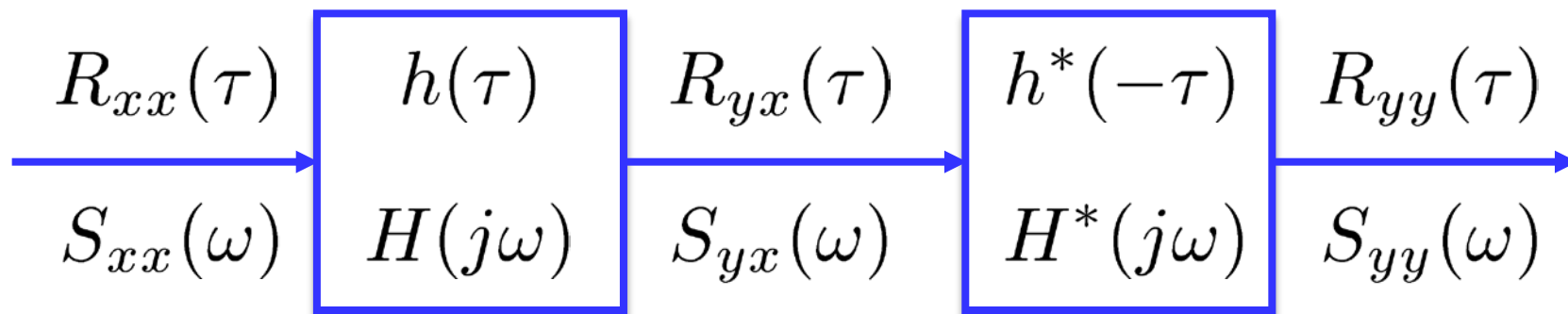
- $R_{yy}(\tau) = R_{yx}(\tau) * h^*(-\tau)$

$$\leftrightarrow S_{yy}(\omega) = S_{yx}(\omega)H^*(j\omega)$$

- $R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$

$$\leftrightarrow S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega)|H(j\omega)|^2$$

入出力の相関関数と系の伝達特性の関係



$h^*(-t) \Leftrightarrow H^*(j\omega)$ の証明

■ $h(t) = h_R(t) + jh_I(t)$ ($h_R(t), h_I(t) \in \mathbb{R}$) と置くと,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} h^*(-t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (h_R(-t) - jh_I(-t))e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (h_R(\tau) - jh_I(\tau))e^{j\omega\tau} d\tau \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (h_R(\tau) + jh_I(\tau))e^{-j\omega\tau} d\tau \right\}^* \\ &= H^*(j\omega) \end{aligned}$$

線形システムの性質1

- 入力信号が白色雑音かつ $h(t)$ が実因果システムの時、すなわち $R_{xx}(\tau) = \delta(\tau)$, $h(t) = 0 (t < 0)$ のとき、

$$R_{xy}(\tau) = 0 (\tau > 0)$$

- 従って $\tau > 0$ において
 $y(t)$ は $x(t + \tau)$ と直交する

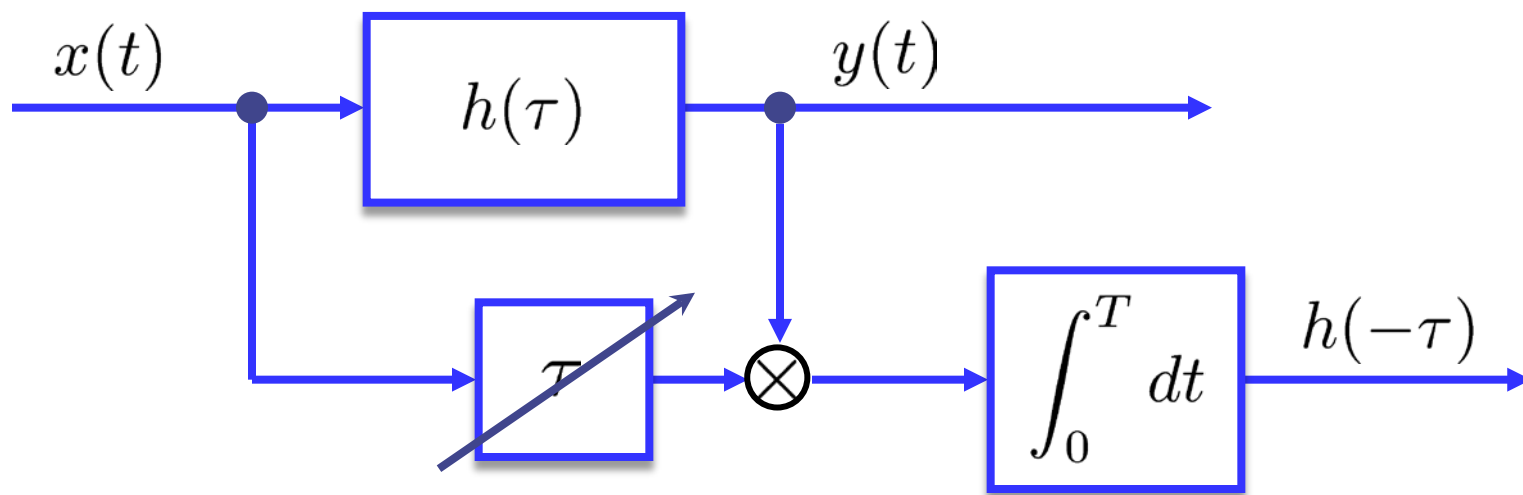
略証

$$\begin{aligned} \blacksquare R_{xy}(\tau) &= \mathbb{E}[x(t + \tau)y^*(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[x(t + \tau)x^*(t - \alpha)]h^*(\alpha)d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau + \alpha)h^*(\alpha)d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \beta)h^*(-\beta)d\beta \\ &= R_{xx}(\tau) * h^*(-\tau) \\ &= \delta(\tau) * h^*(-\tau) \\ &= h(-\tau) = 0 \quad (\tau > 0) \end{aligned}$$

線形システムの性質2

- 入力信号が白色雑音かつ $h(t)$ が実因果システムの場合, 入出力間の相互相関関数 = インパルス応答となる

$$h(-\tau) = R_{xy}(\tau) = \phi_{xy}(\tau) \simeq \frac{1}{T} \int_0^T x(t + \tau)y(t)dt$$



線形システムの性質3

- 入力信号が白色でない場合, インパルス応答を求めるには以下の積分方程式を解けば良い

$$R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \alpha)h(-\alpha)d\alpha$$

- エルゴード性が成り立つならば,

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau - \alpha)h(-\alpha)d\alpha$$

線形システムの性質3

- 前頁の積分方程式の解はFourier変換を用いて計算可

$$\Phi_{xy}(j\omega) = \Phi_{xx}(j\omega)H^*(j\omega)$$

$$H^*(j\omega) = \frac{\Phi_{xy}(j\omega)}{\Phi_{xx}(j\omega)}$$

The slide features a minimalist design with blue lines and corner ornaments. A vertical line on the left and a horizontal line at the top intersect at the top-left corner, with a small blue circle at the intersection. Another horizontal line is positioned below the first one. At the bottom-right corner, a vertical line and a horizontal line intersect, also with a small blue circle at the intersection. The main text is centered in the upper-left quadrant.

第5章： 特性関数

確率密度関数のモーメント

- 確率変数 x の n 次モーメント : x^n の期待値

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx = E[x^n]$$

- モーメントと統計量

m_1 : 平均 (分布の中心)

$m_1 = 0$ であれば、

$m_2 = \sigma^2$: 分散 (分布の広がり)

m_3/σ^3 : 歪度 (分布の非対称性)

$m_4/\sigma^4 - 3$: 尖度 (分布の鋭さ)

確率密度関数のモーメント

- 不規則信号 $x(t)$ の n 次モーメント :

$$m_n(t_1, t_1, \dots, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)^n f(x; t_1) dx = E[x(t_1)^n]$$

- 下記のような多変数のモーメントも定義できる

$$\begin{aligned} m_n(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t_1)x_2(t_2) \cdots x_n(t_n) f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx \\ &= \mathbb{E}[x(t_1)x(t_2) \cdots x(t_n)] \end{aligned}$$

特性関数

- 特性関数: 確率密度関数の逆Fourier変換の 2π 倍

$$\Theta(ju; t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x; t) e^{jux} dx$$

$$p(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(ju; t) e^{-jux} du$$

- $\Theta(ju; t) = \mathbb{E}[e^{jux}]$ なので e^{jux} の期待値とも見なせる

特性関数のマクローリン級数展開

- マクローリン級数展開(原点周りのテイラー展開)

$$\Theta(ju; t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n \Theta(ju; t)}{d(ju)^n} \Big|_{u=0} \frac{(ju)^n}{n!}$$

- 展開係数がモーメントに一致

$$\frac{d^n \Theta(ju; t)}{d(ju)^n} \Big|_{u=0} = m_n(t, t, \dots, t)$$

特性関数の対数のマクローリン級数展開

- マクローリン級数展開(原点周りのテイラー展開)

$$\log \Theta(ju; t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n \log \Theta(ju; t)}{d(ju)^n} \Big|_{u=0} \frac{(ju)^n}{n!}$$

- キュムラント (Cumulant)

$$k_n(t, t, \dots, t) = \frac{d^n \log \Theta(ju; t)}{d(ju)^n} \Big|_{u=0}$$

モーメントとキュムラントの関係

■ 1次

$$k_1(t) = \left. \frac{d \log \Theta}{d(ju)} \right|_{u=0} = \left. \left(\frac{1}{\Theta} \frac{d\Theta}{d(ju)} \right) \right|_{u=0} = m_1(t)$$

■ 2次

$$k_2(t, t) = \left. \frac{d^2 \log \Theta}{d(ju)^2} \right|_{u=0}$$

2次のキュムラント=分散

↑

$$= \left[\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d(ju)^2} - \frac{1}{\Theta^2} \left(\frac{d\Theta}{d(ju)} \right)^2 \right] \Bigg|_{u=0} = m_2(t, t) - m_1(t)^2$$

■ 3次

$$k_3(t, t, t) = m_3(t, t, t) - 3m_1(t)m_2(t, t) + 2m_1(t)^3$$

The slide features a minimalist design with blue lines and corner markers. A vertical line on the left and a horizontal line at the top intersect at the top-left corner, with a small blue circle at the intersection. Another horizontal line is positioned below the main text. A vertical line on the right and a horizontal line at the bottom intersect at the bottom-right corner, also with a small blue circle at the intersection.

第6章： ガウス性不規則信号

確定信号

- 2次以上のキュムラントが恒等的に0
⇔ 確定信号

$$k_2(t_i, t_j) = m_2(t_i, t_j) - m_1(t_i)m_1(t_j) = 0$$

↓ $t_i = t_j$ とすると

$$m_2(t_i, t_i) - m_1(t_i)^2 = \sigma^2(t_i) = 0$$

分散=0

⇔ 全ての確率集合の全ての要素が等しい

⇔ 確定信号

ガウス性不規則信号(正規不規則信号)

- 3次以上のキュムラントが恒等的に0
⇔ ガウス性不規則信号 (Gaussian random signal)

$$\Theta(ju; t) = \exp \left[jk_1(t)u - \frac{1}{2}k_2(t, t)u^2 \right]$$

$$p(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(ju; t) e^{-jux} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi k_2}} e^{-\frac{(x - k_1)^2}{2k_2}}$$

n変数で3次以上のキユムラントが0の場合

- n次(n変数)の場合に, 3次以上のキユムラントが0であるとすると, 確率密度関数はどう表されるか?

$$\Theta_n(ju_1, ju_2, \dots, ju_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$= \exp \left[j \sum_{i=1}^n k_1(t_i) u_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_2(t_i, t_j) u_i u_j \right]$$

- n変数の特性関数が上記のように2次までの多項式で表される

n変数で3次以上のキュムラントが0の場合

- 「確率密度関数＝特性関数のFourier変換」より

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(j \sum_{i=1}^n k_1 u_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_2 u_i u_j \right) \\ &\quad \exp \left(-j \sum_{i=1}^n u_i x_i \right) du_1 \cdots du_n \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_2 u_i u_j \right) \\ &\quad \exp \left(-j \sum_{i=1}^n u_i (x_i - k_1) \right) du_1 \cdots du_n \end{aligned}$$

n変数で3次以上のキュムラントが0の場合

- 「確率密度関数＝特性関数のFourier変換」より

$$p(x_1, \dots, x_n)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\det K_2|^{1/2}}$$

n変数のガウス分布

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_2(t_i, t_j) (x_i - k_1(t_i)) (x_j - k_1(t_j)) \right]$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_2(t_1, t_1) & k_2(t_1, t_2) & \cdots & k_2(t_1, t_n) \\ k_2(t_2, t_1) & k_2(t_2, t_2) & \cdots & k_2(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_2(t_n, t_1) & k_2(t_n, t_2) & \cdots & k_2(t_n, t_n) \end{bmatrix}$$

$$K_2^{-1} = A_2 = (a_2(t_i, t_j))_{N \times N}$$

n変数で3次以上のキユムラントが0の場合

■ 1次のキユムラント

$$k_1 = \mu_1$$

■ 2次のキユムラント

$$\begin{aligned}k_2(t_i, t_j) &= m_2(t_i, t_j) - m_1(t_i)m_1(t_j) \\ &= \mathbb{E}[x(t_i)x(t_j)] - \mu(t_i)\mu(t_j) \\ &= \mathbb{E}[\{x(t_i) - \mu(t_i)\}\{x(t_j) - \mu(t_j)\}]\end{aligned}$$

K_2 は共分散行列

ガウス性不規則信号の性質1

- ガウス性不規則信号同士が無相関ならば独立である

- 一般には

独立 → 無相関 ○

無相関 → 独立 ×

無相関⇒独立(ガウス性の場合)の証明 (1/2)

■ 結合密度関数(再掲)

$$p(x_1, \dots, x_n)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\det K_2|^{1/2}}$$

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_2(t_i, t_j) (x_i - k_1(t_i)) (x_j - k_1(t_j)) \right]$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_2(t_1, t_1) & k_2(t_1, t_2) & \cdots & k_2(t_1, t_n) \\ k_2(t_2, t_1) & k_2(t_2, t_2) & \cdots & k_2(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_2(t_n, t_1) & k_2(t_n, t_2) & \cdots & k_2(t_n, t_n) \end{bmatrix}$$

$$K_2^{-1} = A_2 = (a_2(t_i, t_j))_{N \times N}$$

無相関⇒独立(ガウス性の場合)の証明 (2/2)

- 各要素が無相関ならば K_2 は対角行列なので A_2 も対角行列

- $\det K_2 = k_2(t_1, t_1)k_2(t_2, t_2) \cdots k_2(t_n, t_n)$

- $$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_2(t_i, t_j) (x_i - k_1(t_i)) (x_j - k_1(t_j))$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_2(t_i, t_i)^{-1} (x_i - k_1(t_i))^2$$

- よって

➡ 要素ごとのガウス分布の積

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi k_2(t_i, t_i)}} \exp\left(-\frac{(x_i - k_1(t_i))^2}{2k_2(t_i, t_i)}\right)$$

ガウス性不規則信号の性質2

- ガウス性不規則信号を入力とした線形系出力信号はガウス性不規則信号である
- 略証：
 - 線形系出力信号を

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau$$
$$\simeq \sum_n x(t - n\Delta\tau)h(n\Delta\tau)\Delta\tau$$

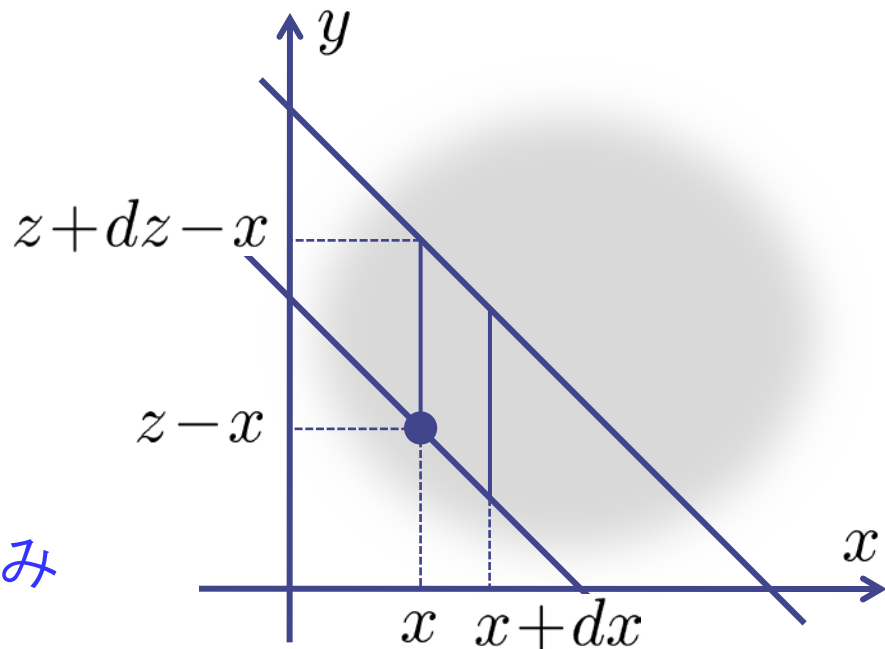
のように捉えると、ガウス分布に従う確率変数の和がガウス分布に従うことが言えれば良い

確率変数の和の確率密度関数 (1/2)

- 独立な確率変数 x, y の確率密度関数がそれぞれ $p_x(x), p_y(y)$ であるとき, $z = x + y$ の確率密度関数 $p_z(z)$ はどうなるか?
- $p_z(z)dz$: z が $z \sim z + dz$ に含まれる確率
= x, y の同時分布の下記帯状領域の積分値

$$\begin{aligned} & \underline{p_z(z)dz} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, z-x) dx dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) p_y(z-x) dx dz \end{aligned}$$

確率密度関数同士の畳み込み



確率変数の和の特性関数

- 独立な確率変数 x, y の特性関数がそれぞれ $\Theta_x(ju), \Theta_y(ju)$ であるとき, $z = x + y$ の特性関数は

$$\begin{aligned}\Theta_z(ju) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_z(z) e^{jzu} dz \\ &= \Theta_x(ju) \cdot \Theta_y(ju) \quad \because \text{重畳積分定理}\end{aligned}$$

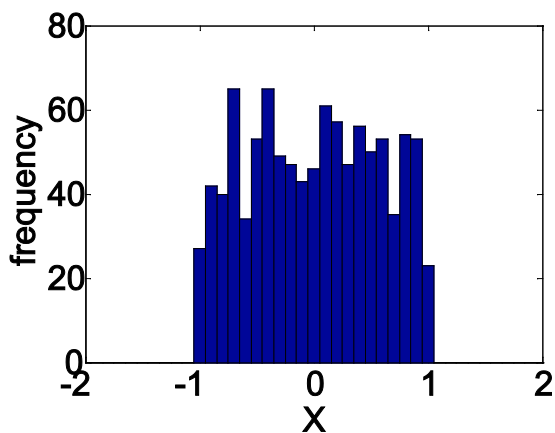
- (1) ガウス分布の特性関数はガウス分布関数
- (2) ガウス分布関数同士のはガウス分布関数
- (3) ガウス分布関数のFourier変換はガウス分布関数
- よって, x, y がガウス分布に従うとき, $z = x + y$ もガウス分布に従う

中心極限定理

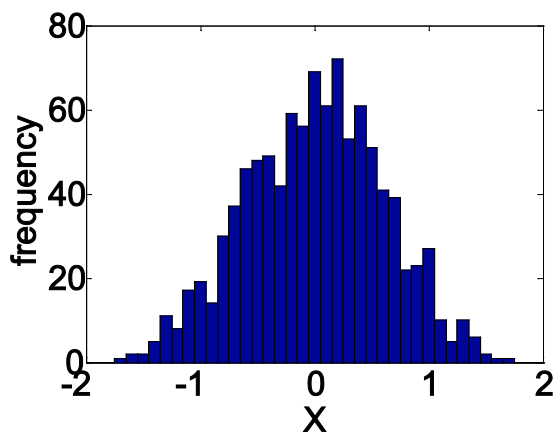
- 確率変数 x_1, x_2, \dots, x_N が独立に同一な確率密度関数 $p_x(x)$ に従うならば, $z = (x_1 + x_2 + \dots + x_N)/\sqrt{N}$ の確率密度関数は $N \rightarrow \infty$ でガウス分布に近づく
- ただし, x の平均は0とする

中心極限定理の例1

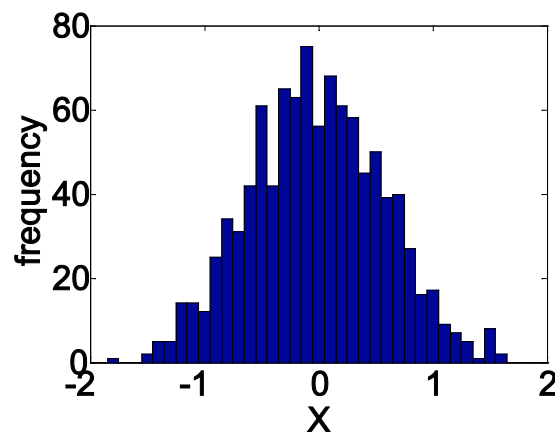
- $[-1, 1]$ の一様分布に従う確率変数の場合
(1000試行のヒストグラム)



$N = 1$



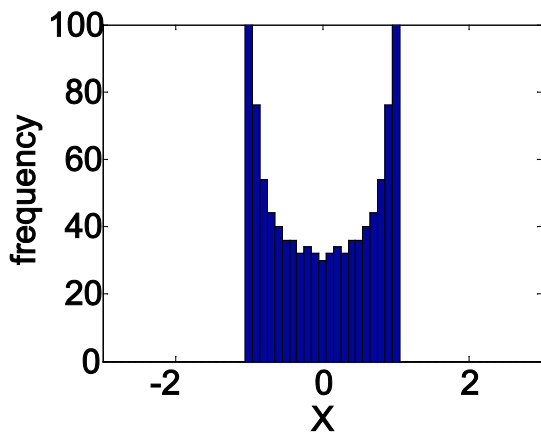
$N = 4$



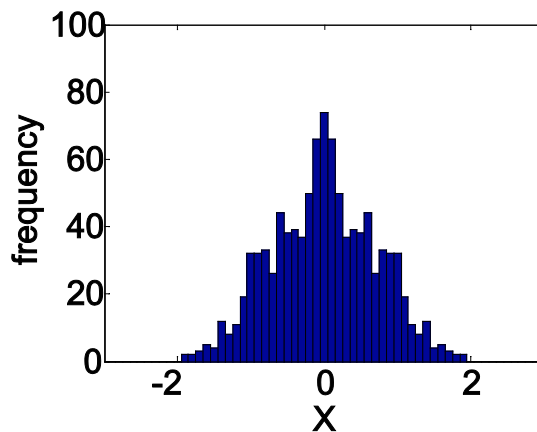
$N = 16$

中心極限定理の例2

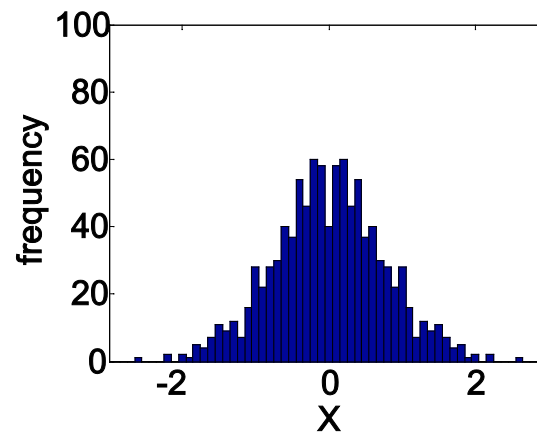
- 周波数が一様分布に従う正弦波信号の振幅
(1000試行のヒストグラム)



$N = 1$



$N = 4$



$N = 16$

中心極限定理の略証 (1/2)

■ x の特性関数を $\Theta_x(ju)$ とする

■ $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$ の特性関数 $\Theta_y(ju)$

$$\Theta_y(ju) = \Theta_x(ju)^N \quad (\because \text{重畳積分定理})$$

■ $z = y/\sqrt{N}$ の確率密度関数 $p_z(z)$

$$p_z(z) = \sqrt{N}p_y(\sqrt{N}z)$$

■ $z = y/\sqrt{N}$ の特性関数 $\Theta_z(ju)$

$$\Theta_z(ju)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_z(z)e^{jzu} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{N}p_y(\sqrt{N}z)e^{jzu} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_y(y)e^{jy(u/\sqrt{N})} dy = \Theta_y(ju/\sqrt{N}) = \Theta_x(ju/\sqrt{N})^N$$

中心極限定理の略証 (2/2)

- $\log \Theta_x(ju)$ のマクローリン展開

$$\log \Theta_x(ju) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{(ju)^n}{n!}$$

- $\log \Theta_z(ju)$ のマクローリン展開

$$\begin{aligned} \log \Theta_z(ju) &= N \log \Theta_x(ju/\sqrt{N}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{Nk_n}{N^{n/2}} \right) \frac{(ju)^n}{n!} \end{aligned}$$

- 3次以上のキュムラントは $N \rightarrow \infty$ で 0 に収束
⇒ 分布がガウス分布に収束