信号処理論第二
第4回 (10/25)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
亀岡 弘和
kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp

講義予定

- 10/03: 第1回
- 10/10: 第2回
- 10/17: 第3回
- 10/24: 第4回
- 10/31: 休講
- 11/07: 第5回
- 11/14: 第6回
- 11/21: 第7回
- 11/28: 第8回
- 12/07: 第9回
- 12/12: 第10回
- 12/19: 第11回
- 01/09: 第12回
- 01/16: 授業休止日
- 01/23: 第13回
- 01/30: 期末試験

講義内容

- δ関数再考
- δ関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

講義資料と成績評価

- 講義資料
  - http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/sp2/
- 成績評価
  - 出席点
  - 学期末試験

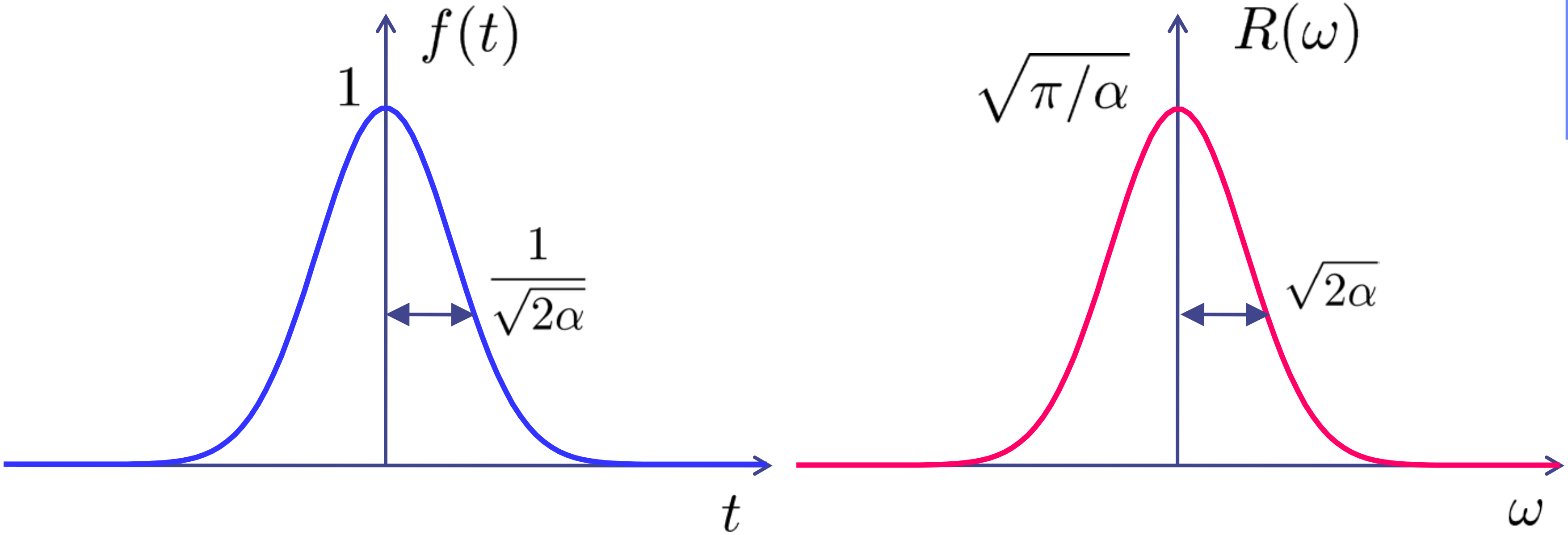
前回の復習

- 重畳積分定理
  - $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)$
  - $f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$
- Persevalの定理
  - $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$
- 超関数・不連続関数を含む重要なFourier変換対
  - 定数関数、δ関数
  - 複素正弦波、sin、cos
  - 矩形窓、三角窓、ガウス窓
  - 周期δ関数

ガウス関数のFourier変換

復習

- $f(t) = e^{-\alpha t^2}$



$$\boxed{e^{-\alpha t^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \quad (\alpha > 0)}$$

復習

ガウス関数のFourier変換の証明

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha}t + \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha}}\mathrm{d}t$$

$$= e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \underline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2}\mathrm{d}t}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

補足事項:ガウス関数の積分1

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ の証明

求める積分値を I とおくと

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-y^2}dy$$ と表せるので、

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

ここで $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ とおけば、$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ だから

$$I^2 = \int_0^\infty re^{-r^2}dr \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty re^{-r^2}dr = \frac{\pi}{4}$$

補足事項：ガウス関数の積分2

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+jb)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ の証明

$f(z) = e^{-z^2}$ を図に示す四辺形にそって積分する.

$\oint e^{-z^2}dz$ を求める．ただし，$z = x + jy$ で，

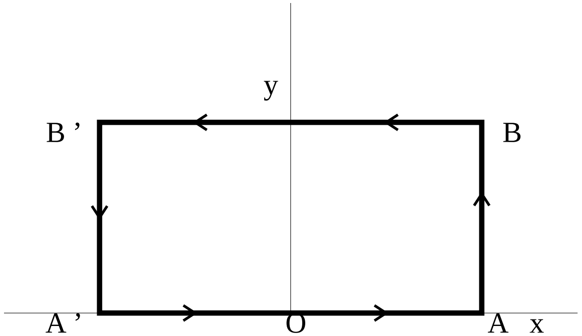
$OA = a, AB = b$ とする.

$A'A$ にそっては，$\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx$ であり，

AB にそっては，$j\int_{0}^{b} e^{-(a+jy)^2}dy,$

BB' にそっては，$\int_{a}^{-a} e^{-(x+jb)^2}dx,$

$B'A$ にそっては，$j\int_{b}^{0} e^{-(-a+jy)^2}dy$ である.



第二，第四の積分は，

$a \to \infty$ で0になる.

e^{-z^2} はこの変域で正則だから

一周積分は0.

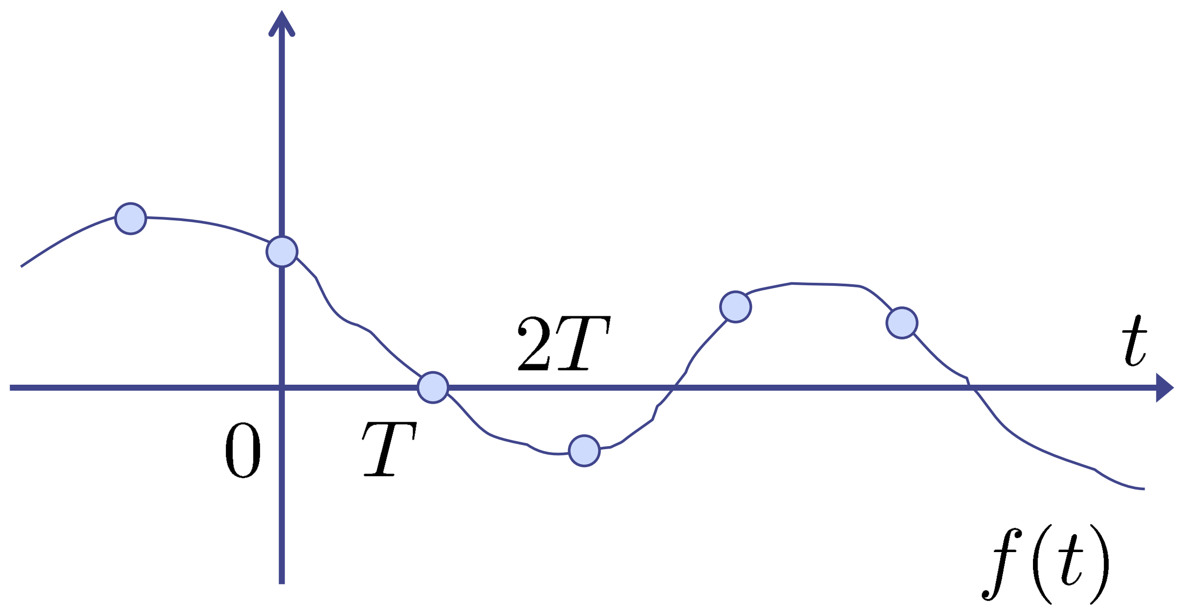
$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx + \int_{\infty}^{-\infty} e^{-(x+jb)^2}dx = 0$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+jb)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

サンプリング定理

連続関数を、サンプル値のみで表現できるか？

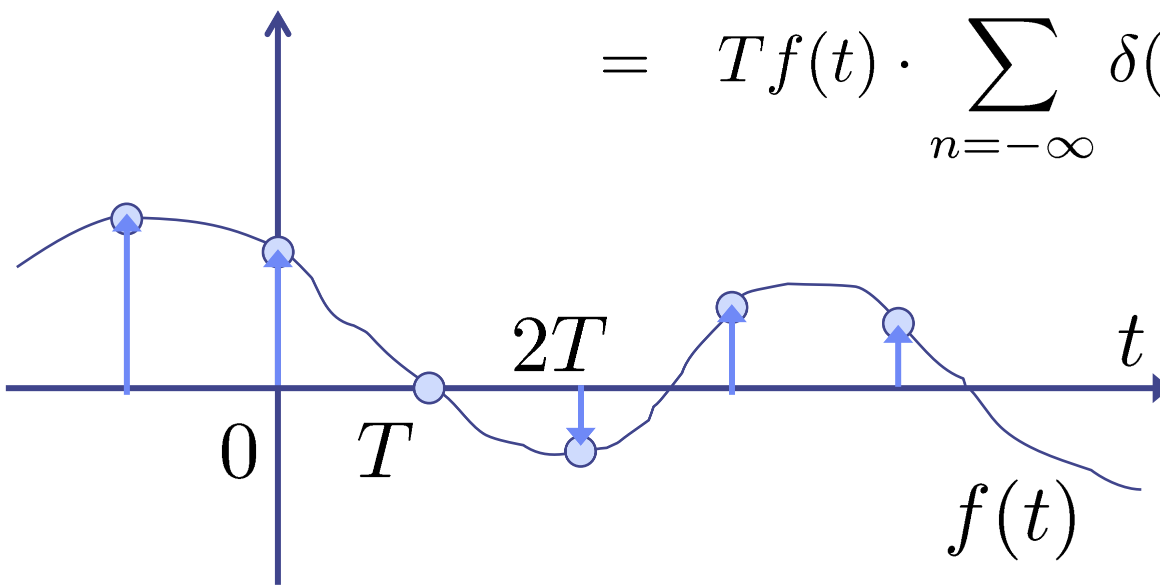
- 効用：連続系を離散系でシミュレートできる
- 明らかに、連続関数に何らかの制約条件が必要



サンプリング定理

サンプル値系列をデルタ関数列とみなし，
元の関数との関係を考える

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tf(nT)\delta(t-nT) \\ &= Tf(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\end{aligned}$$



復習

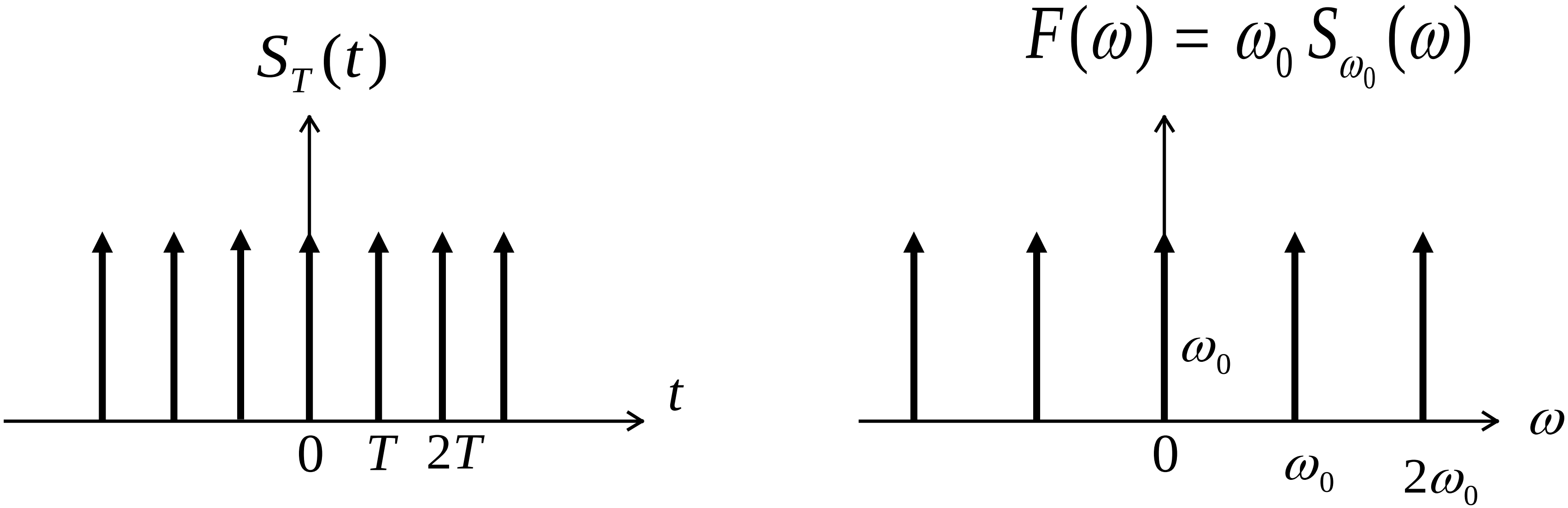
周波数領域の重畳定理

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \qquad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$\boxed{f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)}$$

周期δ関数のFourier変換

復習



$$S_T(t) \leftrightarrow \omega_0 S_{\omega_0}(\omega)$$

$$\omega_0 = 2\pi / T$$

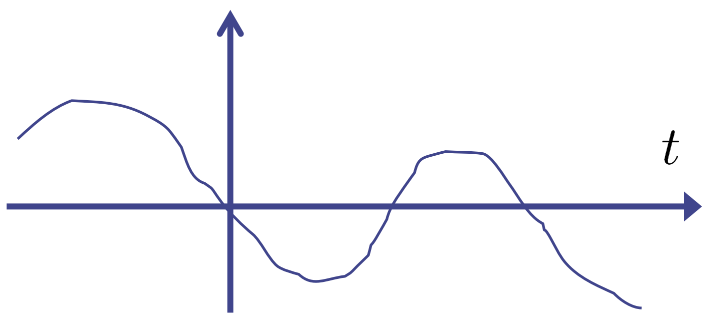
周期δ関数列を乗じた関数のFourier変換

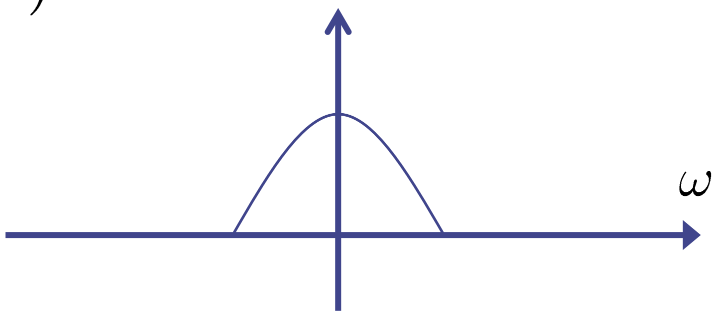
$$\tilde{f}(t) = T f(t) \underbrace{S_T(t)}_{\text{周期δ関数列}}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} T F(\omega) * \omega_0 S_{\omega_0}(\omega) \\
&= \frac{T}{2\pi} \omega_0 F(\omega) * S_{\omega_0}(\omega) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_0)
\end{aligned}$$

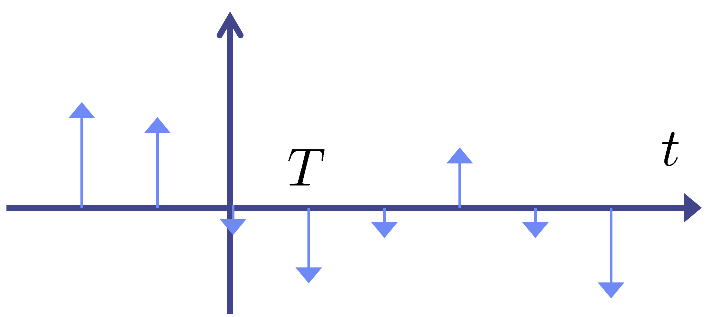
周期δ関数列を乗じた関数のFourier変換

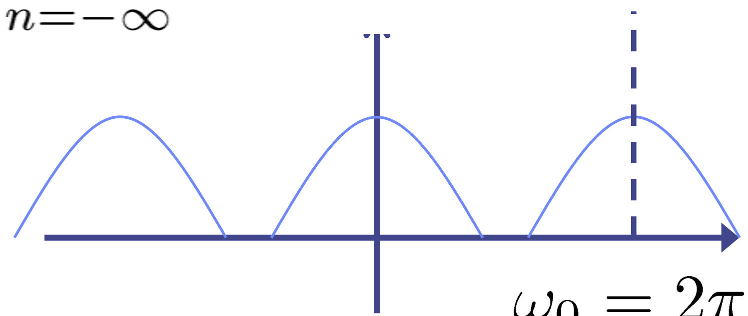
$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$





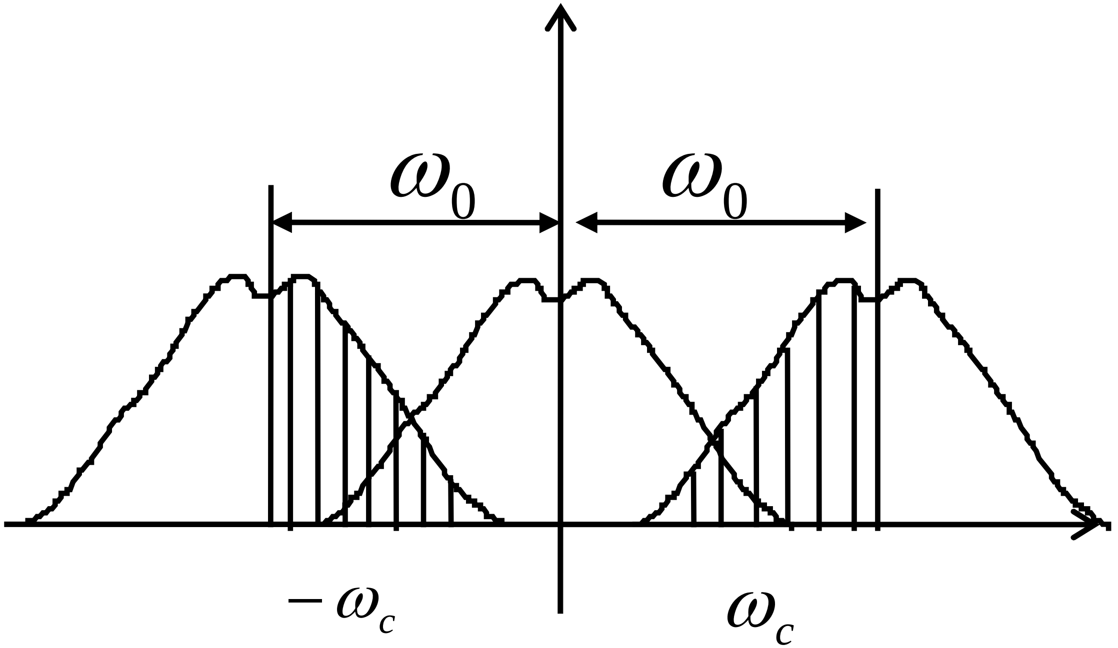
$$\tilde{f}(t) = Tf(t)S_T(t) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_0)$$





$$\omega_0 = 2\pi/T$$

エイリアシング（Aliasing）

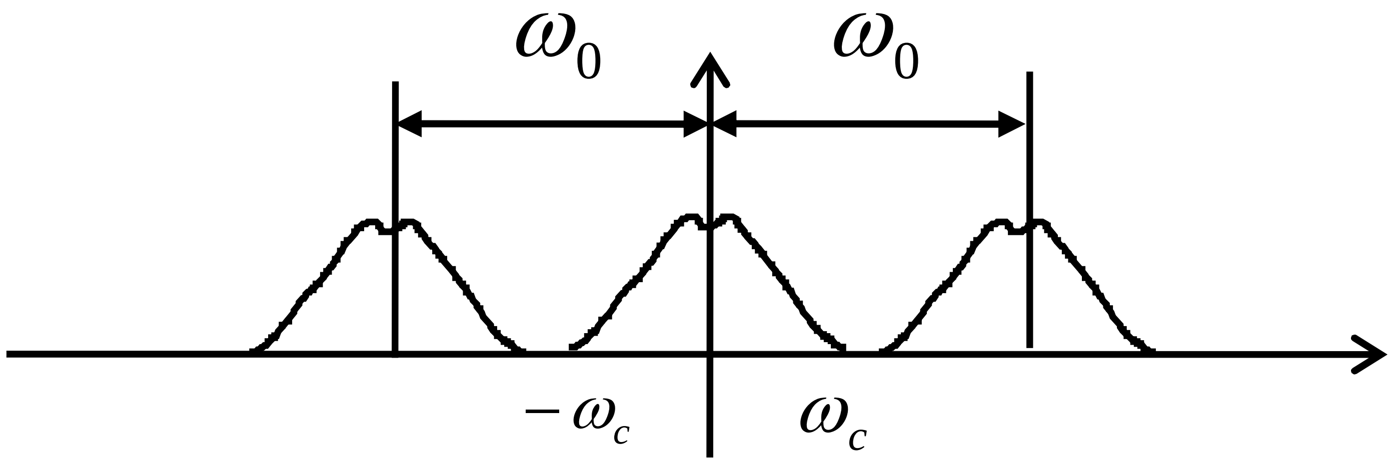


ω_c ：信号がもつ最大周波数　$(F(\omega) = 0 \text{ for } |\omega| \geq \omega_c)$

ω_0 ：サンプリング周波数

サンプリング周波数が低いと
折り返した成分がもとの成分に重なってしまう

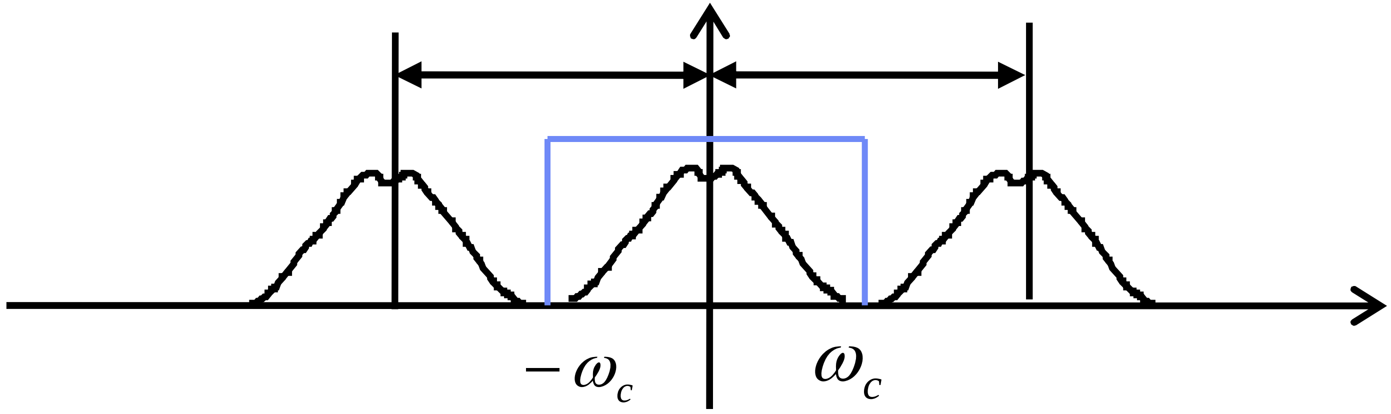
エイリアシングを生じない条件



$F(\omega) = 0$ for $|\omega| \geq \omega_c$ のとき、

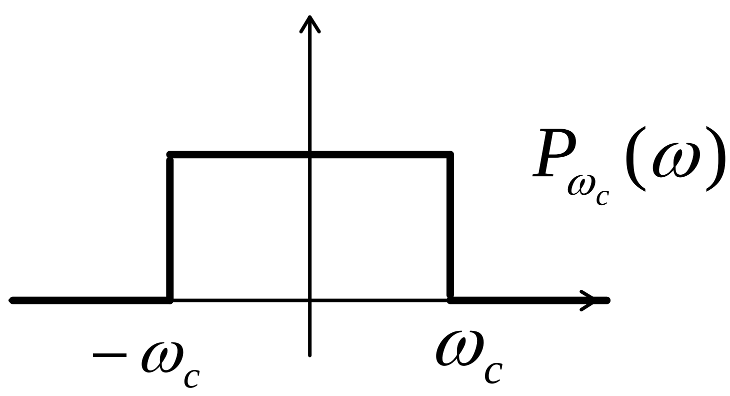
$$\omega_0 \geq 2\omega_c$$

サンプル値系列からの信号の復元



$$\tilde{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_0)$$

$$\boxed{F(\omega) = P_{\omega_c}(\omega)\tilde{F}(\omega)}$$



サンプル値系列からの信号の復元

$$f(t)=\frac{\sin\omega_c t}{\pi t}*\tilde{f}(t)=\frac{\sin\omega_c t}{\pi t}*\frac{\pi}{\omega_c}f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{n\pi}{\omega_c}\right)$$

$$=\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}*\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right)\delta\left(t-\frac{n\pi}{\omega_c}\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega_c(t-\tau)}{\omega_c(t-\tau)}\delta\left(\tau-\frac{n\pi}{\omega_c}\right)d\tau$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n\frac{\sin\omega_c\left(t-\frac{n\pi}{\omega_c}\right)}{\omega_c\left(t-\frac{n\pi}{\omega_c}\right)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n\frac{\sin(\omega_c t-n\pi)}{\omega_c t-n\pi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n\frac{\sin\omega_c(t-nT)}{\omega_c(t-nT)}$$

サンプリング定理から導かれる結論

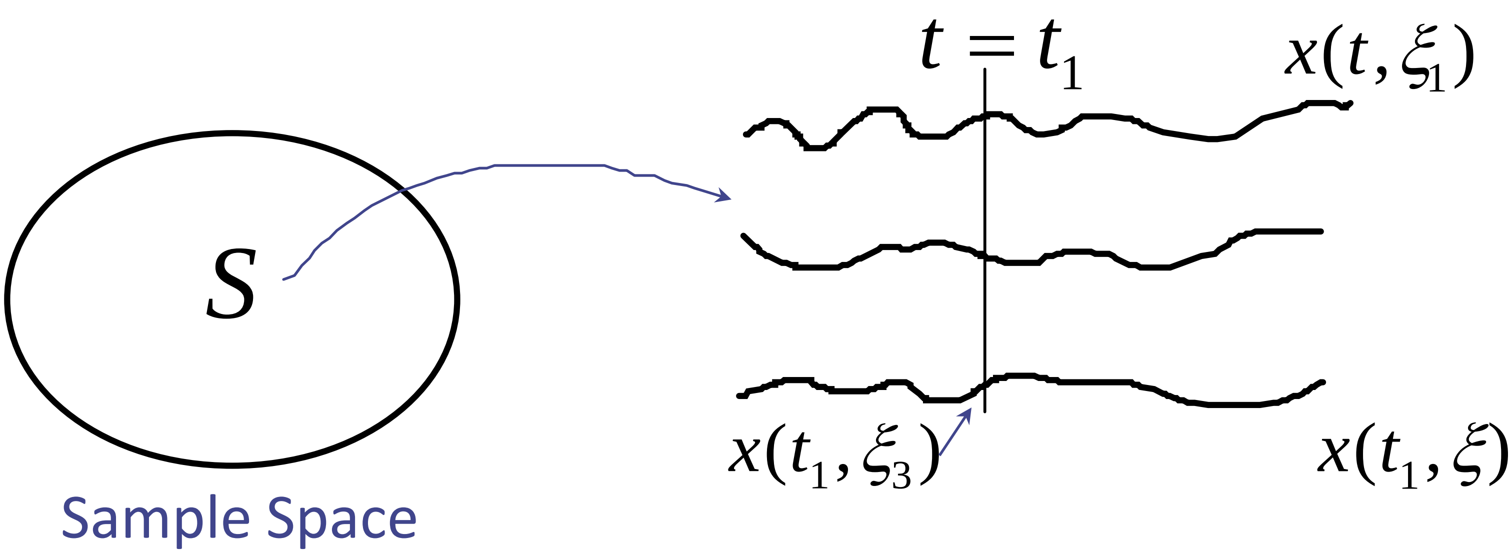
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\sin \omega_c (t - nT)}{\omega_c (t - nT)}$$

帯域正弦信号ならば,
カットオフ周波数の
2倍以上でサンプリングすれば
f_n（$f(t)$ のサンプル値）から
元の $f(t)$ が完全に復元される。

第3章：
相関関数とスペクトル

確定信号と不規則信号

- 確定信号(deterministic signal)
  - 時刻 t に対し値が一意に決定できる信号
- 不規則信号(random signal, stochastic signal)
  - 時刻 t における値が確率的にしか定まらない（観測のたびに値が異なる）
  - 平均、分散、分布などの統計量によりその性質がとらえられる



確率密度関数

- 連続確率変数 *x* の確率密度関数: $f(x)$
  - 注意:*f*(*x*)自体は確率ではない
    ⇒ *f*(*x*)は1以上の値をとることもありえる
    - 例)ガウス分布

σが小さい場合
1より大きい値をとりうる

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

  - xがx～x+dxの値をとる確率がp(x)dx

統計量の定義1

時刻tにおける確率変数x(t)の密度関数
という意味で、以後このように表記する

- 集合平均 $\eta(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;t) dx$
- 自己相関関数 (auto-correlation)

$$
\begin{aligned}
R(t_1, t_2) &= E[x(t_1)x(t_2)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2
\end{aligned}
$$

- 自己共分散 (auto-covariance)

$$
\begin{aligned}
C(t_1, t_2) &= E[\{x(t_1) - \eta(t_1)\}\{x(t_2) - \eta(t_2)\}] \\
&= R(t_1, t_2) - \eta(t_1)\eta(t_2)
\end{aligned}
$$

統計量の定義2

- 相互相関関数 (cross-correlation)

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)y(t_2)]$$

- 相互共分散 (cross-covariance)

$$\begin{aligned} C_{xy}(t_1, t_2) &= E[\{x(t_1) - \eta_x(t_1)\}\{y(t_2) - \eta_y(t_2)\}] \\ &= R_{xy}(t_1, t_2) - \eta_x(t_1)\eta_y(t_2) \end{aligned}$$

無相関と独立

- 無相関 (uncorrelated)

$$E[x(t_1)y(t_2)] = E[x(t_1)]E[y(t_2)]$$

- 独立 (independent)

$$f_{xy}(x, y; t_1, t_2) = f_x(x; t_1)f_y(y; t_2)$$

独立→無相関

定常過程 (stationary process)

- 強定常
  - *x*(*t*) と *x*(*t*+*τ*) が任意の *τ* に対して同一の確率密度分布を有する

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \\
= \quad & f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1+\tau, t_2+\tau, \ldots, t_n+\tau) \text{ for } {}^\forall\tau
\end{aligned}
$$

- 弱定常
  - 平均が定数
  - 自己相関関数が時間差のみの関数

$$E[x(t)] = \eta = \text{const}$$

$$E[x(t)x(t+\tau)] = R(\tau)$$

時間平均 (time mean)

- 時間平均：

通常、定常な信号x(t)に対して
時間平均を考える

$$\mu = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

$$\phi(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t+\tau)x(t)dt$$

- 集合平均（x(t)が定常な場合）：

平均 $$\eta = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

自己相関 $$R(\tau) = E[x(t+\tau)x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2$$

エルゴード性(ergodicity)

- 定常な確率過程 $x(t)$ において，
集合平均＝時間平均が成り立つとき，
「$x(t)$ はエルゴード性をもつ」という
- 必ずしも「定常＝エルゴード性」とは限らない
- 定常でエルゴード的でない信号の例
  - 定数信号$x(t)$，ただし $x(t)=\eta$ の値はある確率分布 $f(x)$ に従う
  - 時刻によらず等しい確率密度分布をもつ→定常
  - 標本信号の時間平均をとっても，集合平均に一致しない
→エルゴード的でない
- 定常＋各時刻が独立ならば、必ずエルゴード的
  - i. i. d (independent and identically distributed）

相互相関関数

- 相互相関(cross correlation)

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t+\tau)y(t)] = R_{yx}(-\tau)$$

- 自己共分散(auto covariance)

$$c(\tau) = E[(x(t+\tau)-\eta)(x(t)-\eta)] = R(\tau)-\eta^2$$

- 相互共分散(cross covariance)

$$c_{xy}(\tau) = E[(x(t+\tau)-\eta_x)(y(t)-\eta_y)] = R_{xy}(\tau)-\eta_x\eta_y$$

自己相関関数の性質

- 偶関数： $R(\tau) = R(-\tau)$

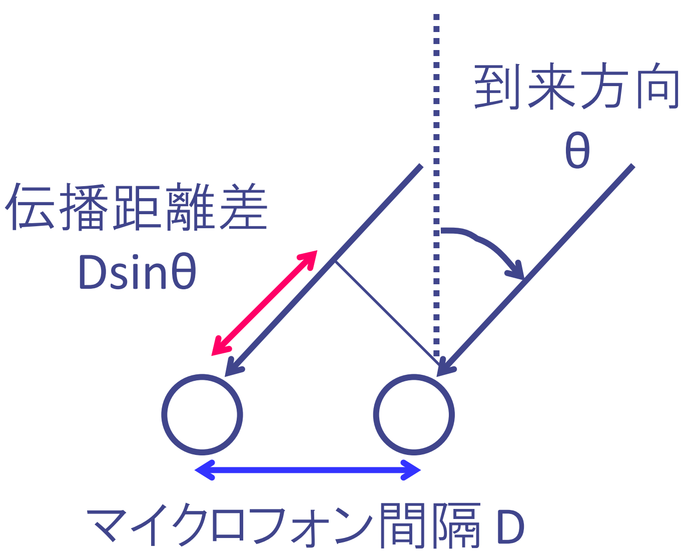
$$
\because R(\tau) = \mathbb{E}[x(t+\tau)x(t)] = \mathbb{E}[x(t)x(t-\tau)] = \mathbb{E}[x(t-\tau)x(t)] \\ = R(-\tau)
$$

- 原点で最大： $|R(\tau)| \leq R(0)$

$$
\begin{aligned}
\because \quad & E[\{x(t+\tau) \pm x(t)\}^2] \\
= \quad & E[x(t+\tau)^2] \pm E[x(t+\tau)x(t)] \\
& \pm E[x(t)x(t+\tau)] + E[x(t)^2] \\
= \quad & 2R(0) \pm 2R(\tau) \geq 0
\end{aligned}
$$

相互相関関数の応用例

- 2つのマイクロフォンにある方向から音波が到来している。音波の到来方向を知りたい。
- 伝播時間差がわかれば方向がわかるが、どんな音波が到来してくるかわからない。



雑音

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= x(t-\tau_0) + n_1(t) \\
f_2(t) &= x(t) + n_2(t) \\
\tau_0 &= D\sin\theta/c
\end{aligned}
$$

相互相関関数のピークを求めればよい