信号処理論第二
第3回 (10/17)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
亀岡 弘和
kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp

講義予定

- 10/03: 第1回
- 10/10: 第2回
- 10/17: 第3回
- 10/24: 第4回
- 10/31: 休講
- 11/07: 第5回
- 11/14: 第6回
- 11/21: 第7回
- 11/28: 第8回
- 12/07: 第9回
- 12/12: 第10回
- 12/19: 第11回
- 01/09: 第12回
- 01/16: 授業休止日
- 01/23: 第13回
- 01/30: 期末試験

講義内容

- δ関数再考
- δ関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

講義資料と成績評価

- 講義資料
  - http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/sp2/
- 成績評価
  - 出席点
  - 学期末試験

前回の復習

- δ関数の正しい定義
  - 例） $\delta(t) = \lim_{\omega \to \infty} \dfrac{\sin \omega t}{\pi t}$
- 実関数のFourier変換の性質
  - 実関数 $f(t)$ の Fourier 変換 $F(\omega)$ は $F(-\omega) = F^*(\omega)$ を満たす
  - すなわち、$F(\omega)$ の実部は偶関数、$F(\omega)$ の虚部は奇関数
  - 逆に $f(t)$ が偶関数ならば、$F(\omega)$ は実部のみ（虚部 0）
    $f(t)$ が奇関数ならば、$F(\omega)$ は虚部のみ（実部 0）
- 重畳積分定理
- Parsevalの定理
- δ関数や不連続関数を含むFourier変換

符号関数のFourier変換

- $f(t) = \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases}$
  - 奇関数より $R(\omega) = 0$

$$\boxed{\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}}$$

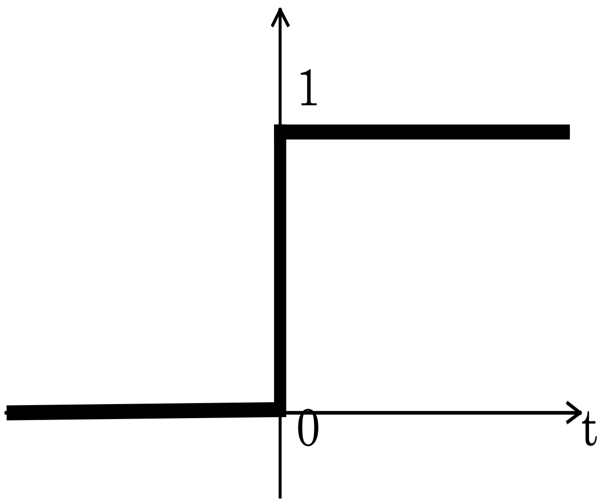
$$\begin{aligned} I(\omega) &= -2\int_0^\infty f(t)\sin\omega t dt \\ &= -2\int_0^\infty \sin\omega t dt \\ &= \frac{-2}{\omega} \end{aligned}$$

$$F(\omega) = jI(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

$$\begin{aligned} \because \int_0^\infty \sin\omega t dt &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T \sin\omega t dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1-\cos\omega T}{\omega} \\ &= \frac{1}{\omega} \end{aligned}$$

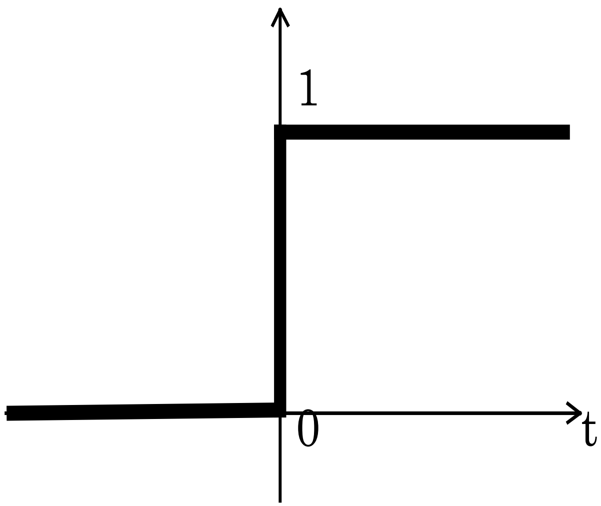
ステップ関数のFourier変換

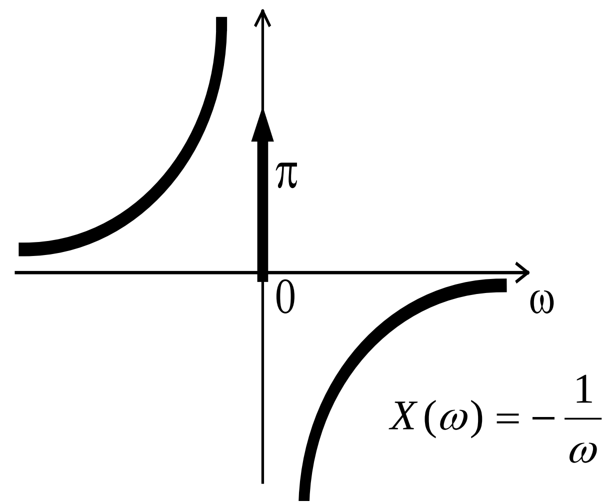
- $$f(t) = U(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 1/2 & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$



ステップ関数のFourier変換

- $$f(t) = U(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 1/2 & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$





$$\boxed{U(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$

$$\because U(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

δ関数の高階微分のFourier変換

- $$f(t) = \frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$$

δ関数の高階微分のFourier変換

- $f(t) = \dfrac{d^n \delta(t)}{dt^n}$

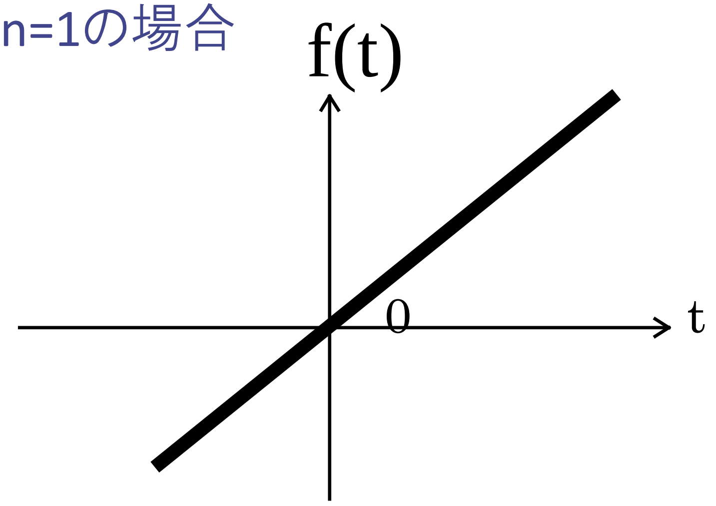
$$\boxed{\frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n}$$

$$\begin{aligned}
\because F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} e^{-j\omega t} dt \\
&= (-1)^n \left. \frac{d^n e^{-j\omega t}}{dt^n} \right|_{t=0} \\
&= (j\omega)^n
\end{aligned}$$

べき乗関数のFourier変換

- $f(t) = t^n$

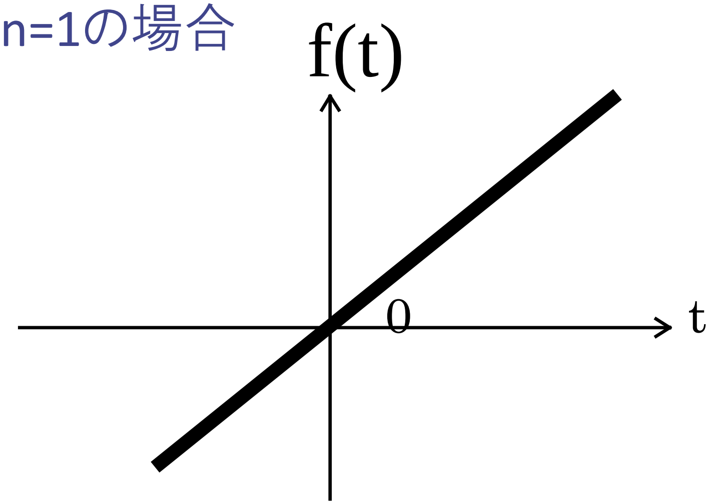
n=1の場合

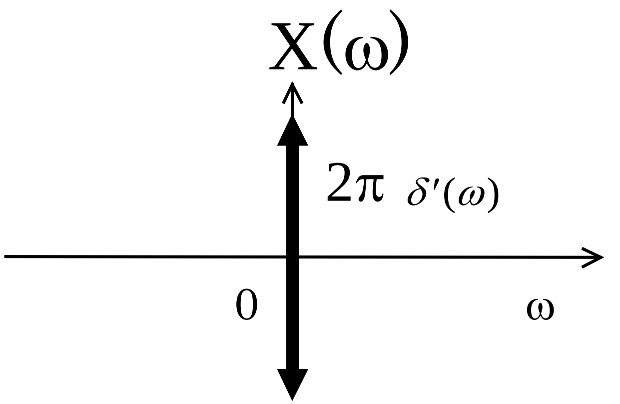


べき乗関数のFourier変換

- $f(t) = t^n$

n=1の場合





$$t^n \leftrightarrow 2\pi j^n \frac{d^n \delta(\omega)}{d\omega^n}$$

べき乗関数のFourier変換の証明

$$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n$$

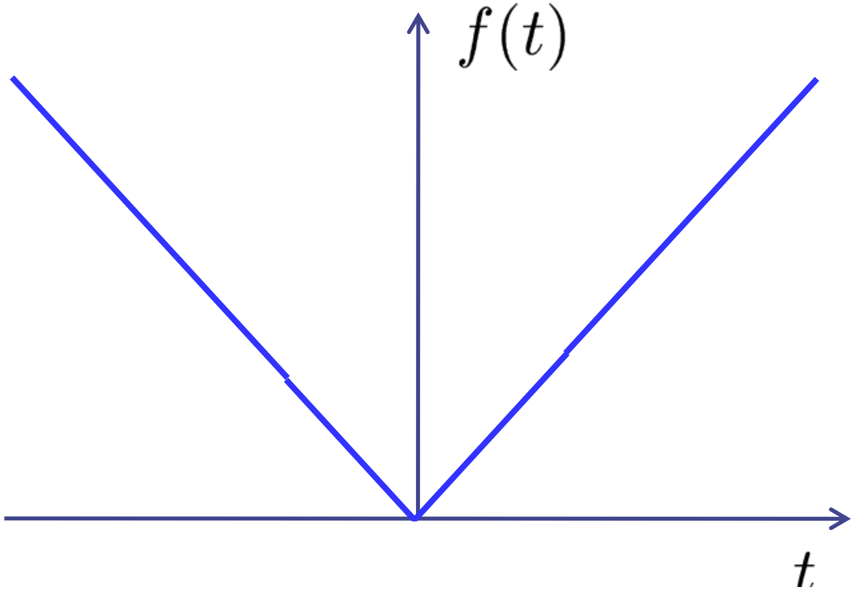
$$(-j)^n \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \leftrightarrow \omega^n$$

$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ を用いれば

$$t^n \leftrightarrow 2\pi j^n \frac{d^n \delta(\omega)}{d\omega^n}$$

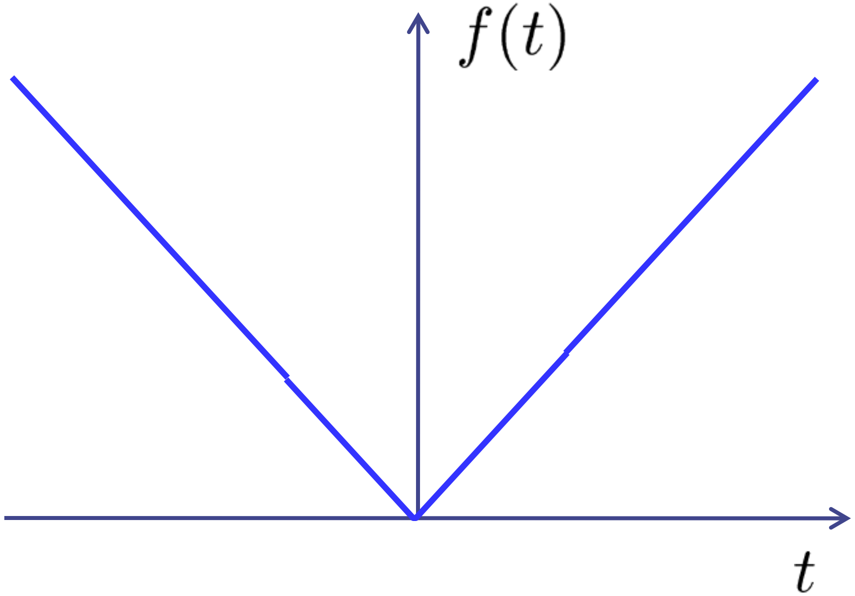
絶対値関数のFourier変換

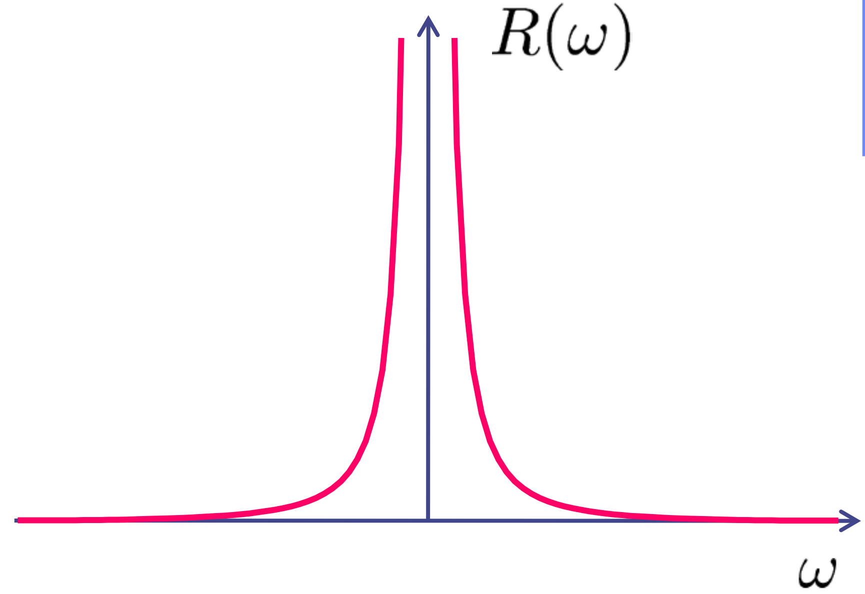
- $f(t) = |t|$



絶対値関数のFourier変換

- $f(t) = |t|$





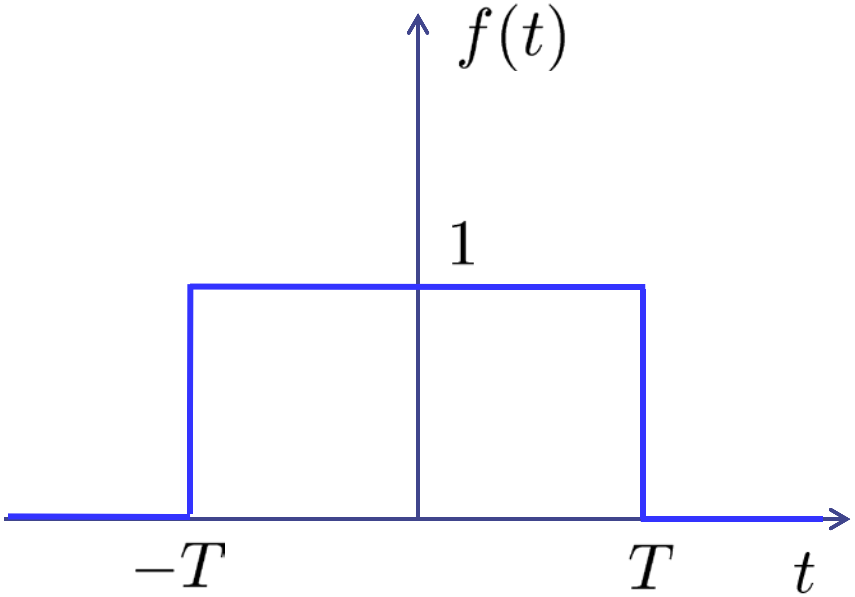
$$\boxed{|t| \leftrightarrow -\frac{2}{\omega^2}}$$

絶対値関数のFourier変換の証明

$$
\begin{aligned}
\because \mathcal{F}[t \cdot \mathrm{sgn}t] &= \frac{1}{2\pi}\left(2\pi j \frac{d\delta(\omega)}{d\omega}\right) * \left(\frac{2}{j\omega}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta(y)}{dy} \cdot \frac{2}{\omega - y} dy \\
&= -2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \cdot \frac{(-1)(-1)}{(\omega - y)^2} dy \\
&= -\frac{2}{\omega^2}
\end{aligned}
$$

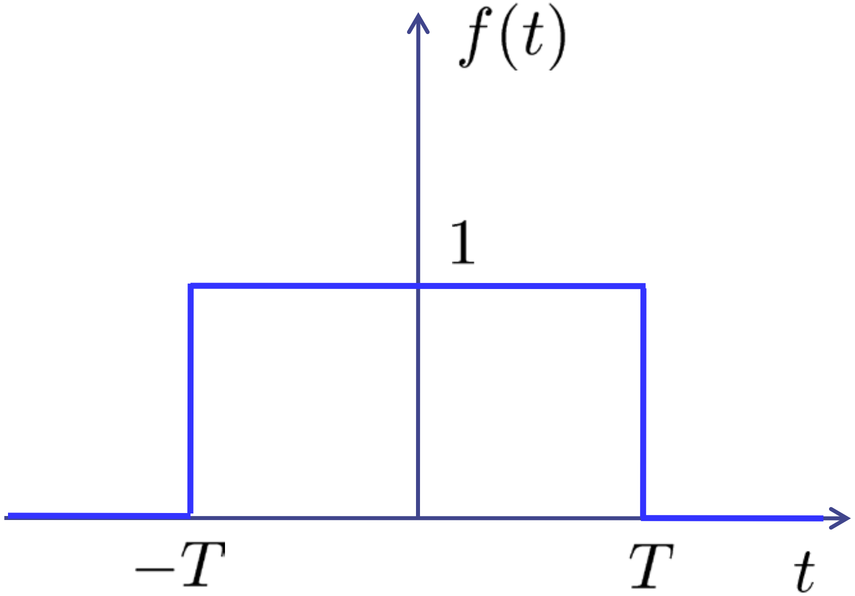
矩形関数のFourier変換

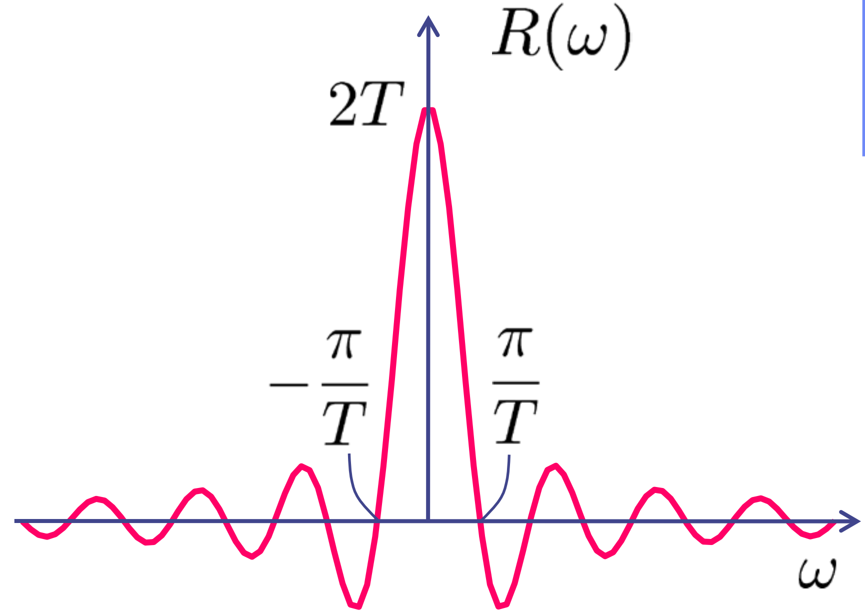
- $f(t) = P_T(t)$



矩形関数のFourier変換

- $f(t) = P_T(t)$





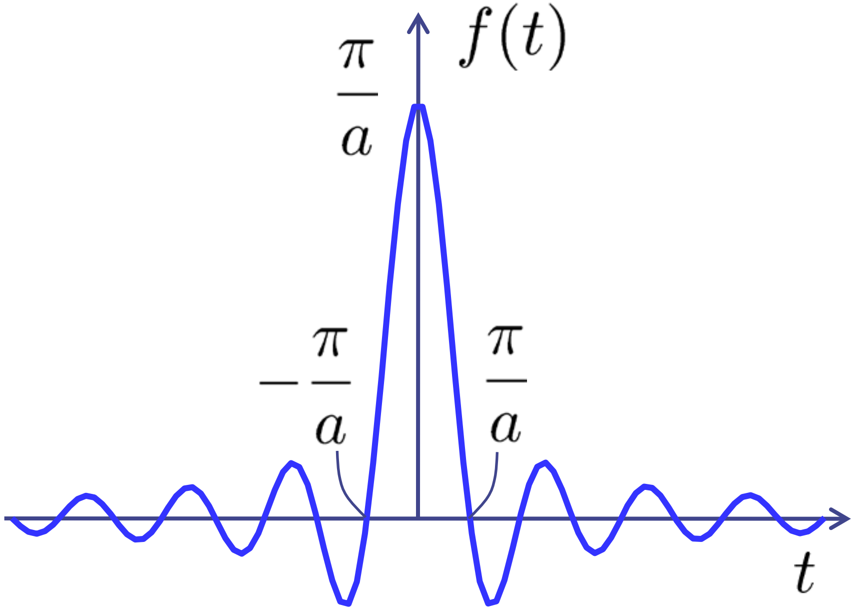
$$\boxed{P_T(t) \leftrightarrow \frac{2\sin\omega T}{\omega}}$$

矩形関数のFourier変換の証明

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} P_T(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}dt$$
$$= \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}\right)$$
$$= \frac{2\sin\omega T}{\omega}$$

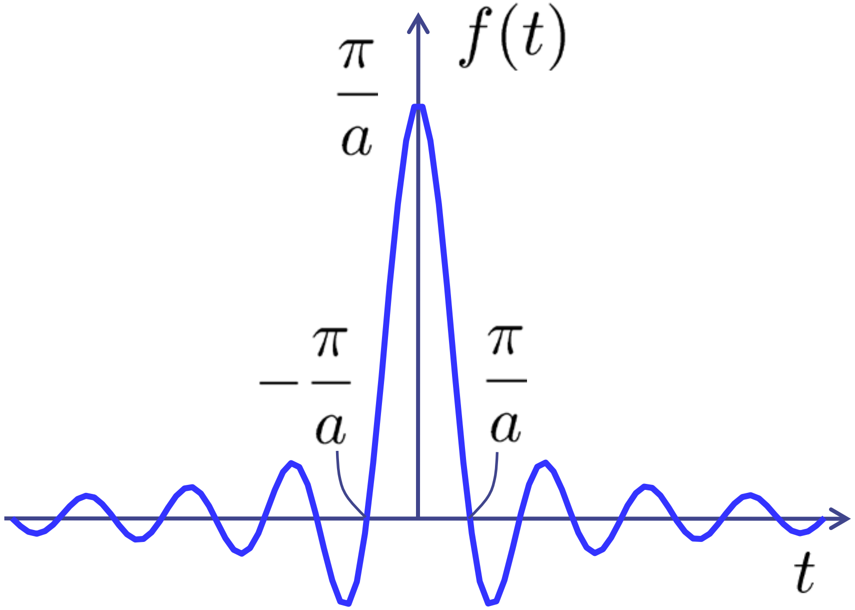
sinc関数のFourier変換

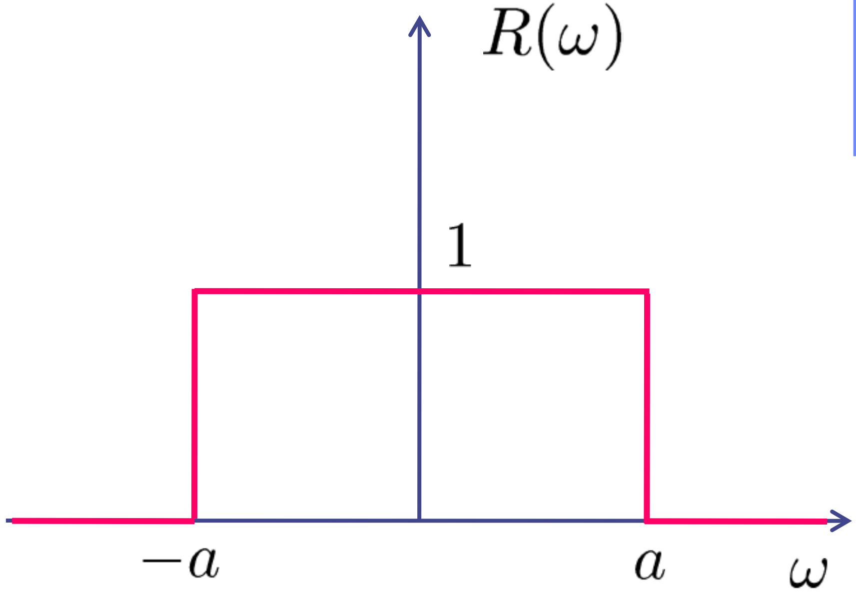
- $f(t) = \dfrac{\sin at}{\pi t}$



sinc関数のFourier変換

- $f(t) = \dfrac{\sin at}{\pi t}$



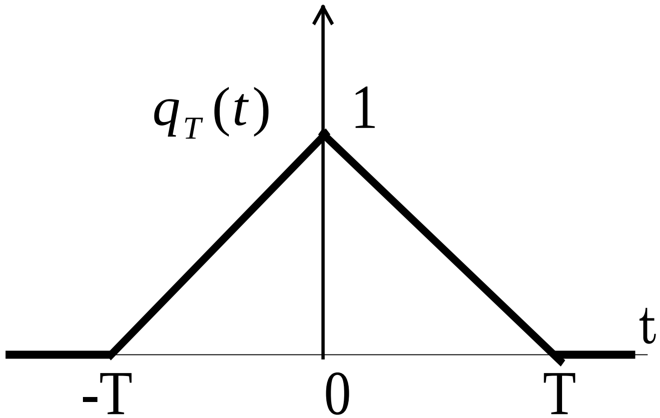


$$\boxed{\frac{\sin at}{\pi t} \leftrightarrow P_a(\omega)}$$

$\because F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ より $\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{2\sin at}{t} \leftrightarrow P_a(-\omega)$

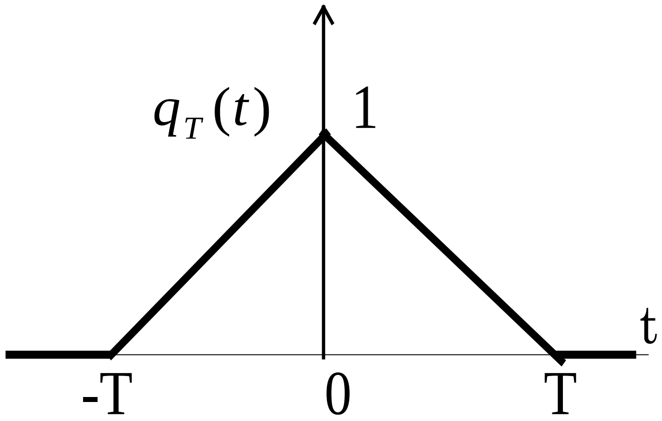
三角窓(bartlett窓)のFourier変換

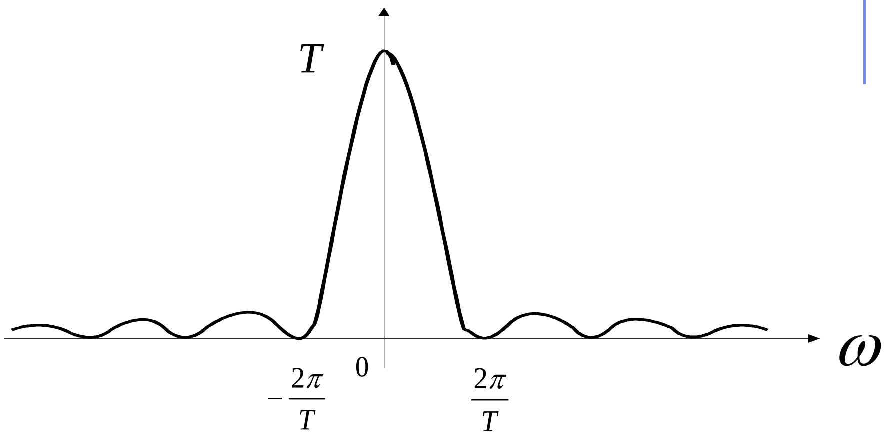
- $f(t) = q_T(t)$



三角窓(bartlett窓)のFourier変換

- $f(t) = q_T(t)$



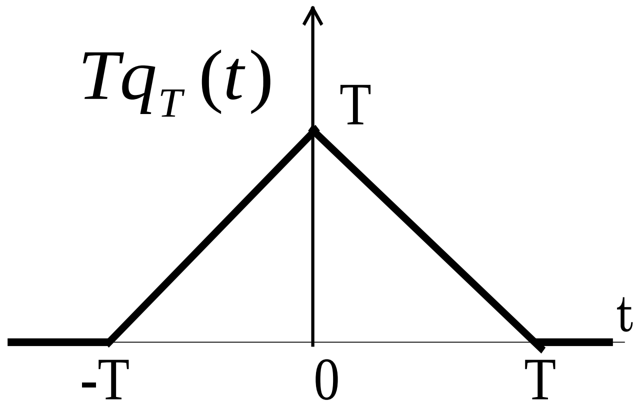


$$\boxed{q_T(t) \leftrightarrow \frac{4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{T\omega^2}}$$

三角窓(bartlett窓)のFourier変換の証明1

$$q_T(t) = \frac{1}{T} P_{T/2}(t) * P_{T/2}(t)$$

$P_{T/2}(t) * P_{T/2}(t) = Tq_T(t)$を示す。



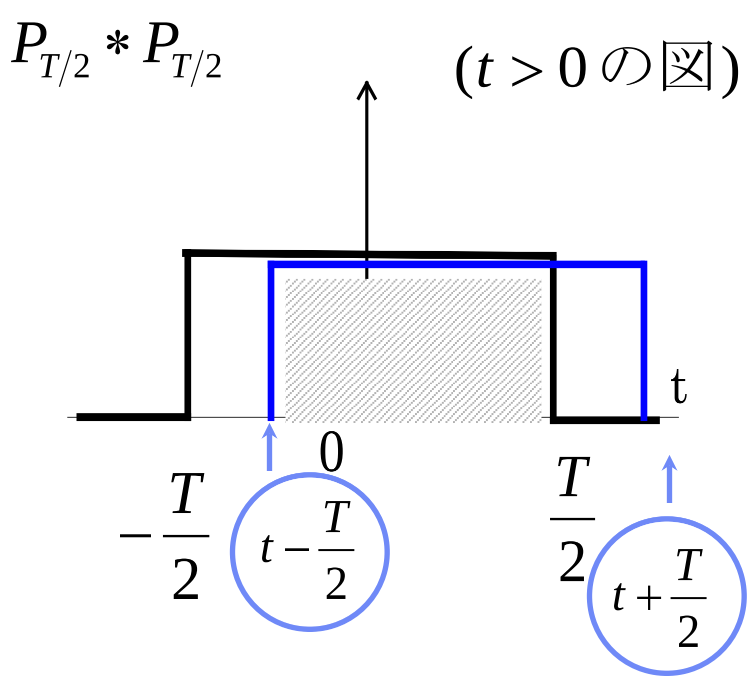
$$\because P_{T/2}(t) * P_{T/2}(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_{T/2}(\tau) P_{T/2}(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} P_{T/2}(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{t-T/2}^{t+T/2} P_{T/2}(\tau') d\tau'$$

$$= \begin{cases} T-t & (0 < t < T) \\ T+t & (-T < t \le 0) \\ 0 & (t \le -T,\ t \ge T) \end{cases}$$



三角窓(bartlett窓)のFourier変換の証明2

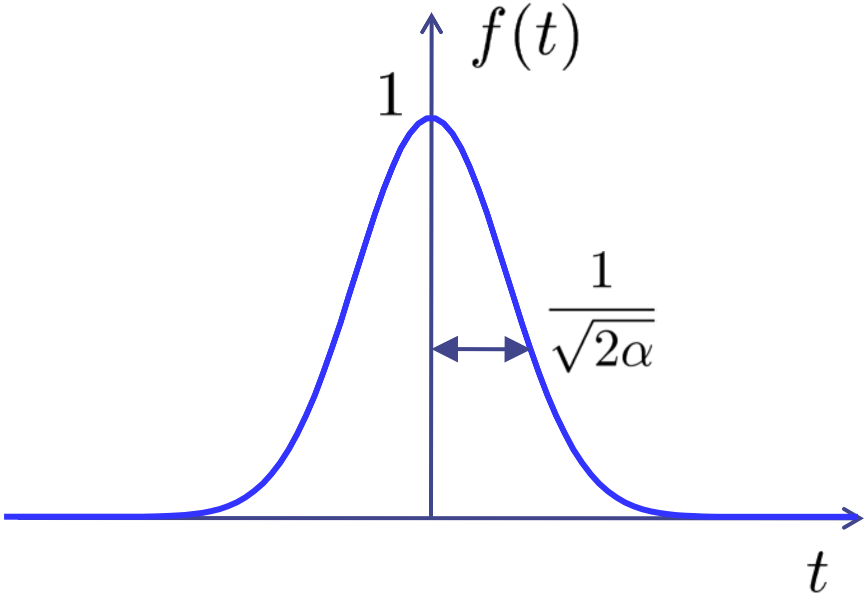
$$\mathrm{F}(q_T) = \frac{1}{T}\mathrm{F}\left(P_{T/2} * P_{T/2}\right) \quad \left(\because q_T = \frac{1}{T} P_{T/2} * P_{T/2}\right)$$

$$= \frac{1}{T} \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} \cdot \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} \quad \left(\because P_{T/2}(t) \leftrightarrow \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega}\right)$$

$$= \frac{4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{T\omega^2}$$

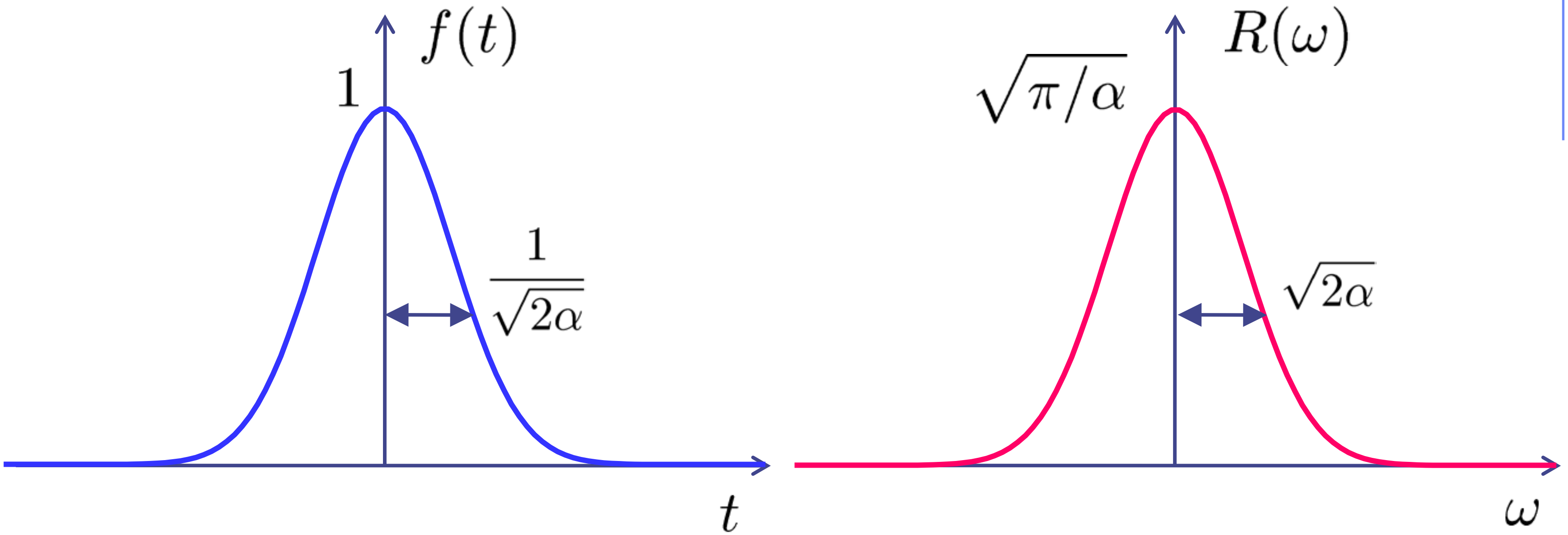
ガウス関数のFourier変換

- $f(t) = e^{-\alpha t^2}$



ガウス関数のFourier変換

- $f(t) = e^{-\alpha t^2}$



$$\boxed{e^{-\alpha t^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \quad (\alpha > 0)}$$

ガウス関数のFourier変換の証明

$$
\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha}t + \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha}} \mathrm{d}t
$$

$$
= e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} \mathrm{d}t}_{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}
$$

補足事項：ガウス関数の積分1

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ の証明

求める積分値を I とおくと

$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-y^2}dy$ と表せるので、

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

ここで $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ とおけば、$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ だから

$$I^2 = \int_0^\infty re^{-r^2}dr \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty re^{-r^2}dr = \frac{\pi}{4}$$

補足事項：ガウス関数の積分2

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+jb)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$の証明

$f(z) = e^{-z^2}$ を図に示す四辺形にそって積分する.

$\oint e^{-z^2} dz$を求める．ただし，$z = x + jy$で,

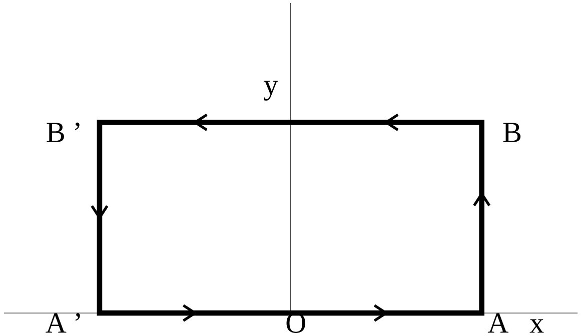
$OA = a, AB = b$とする.

$A'A$にそっては，$\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx$であり，

ABにそっては，$j\int_{0}^{b} e^{-(a+jy)^2} dy,$

BB'にそっては，$\int_{a}^{-a} e^{-(x+jb)^2} dx,$

$B'A$にそっては，$j\int_{b}^{0} e^{-(-a+jy)^2} dy$である.



第二，第四の積分は，

$a \to \infty$で0になる.

e^{-z^2} はこの変域で正則だから

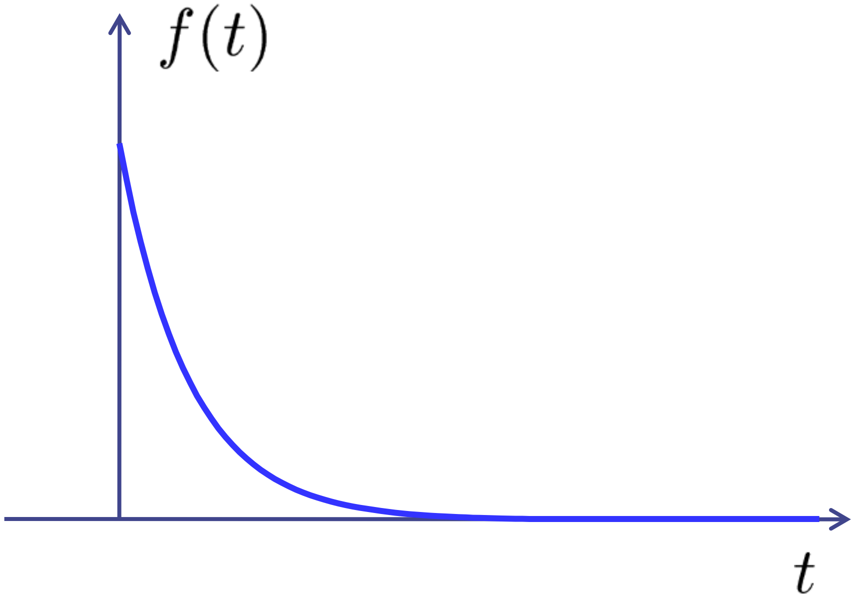
一周積分は0.

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx + \int_{\infty}^{-\infty} e^{-(x+jb)^2} dx = 0$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+jb)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

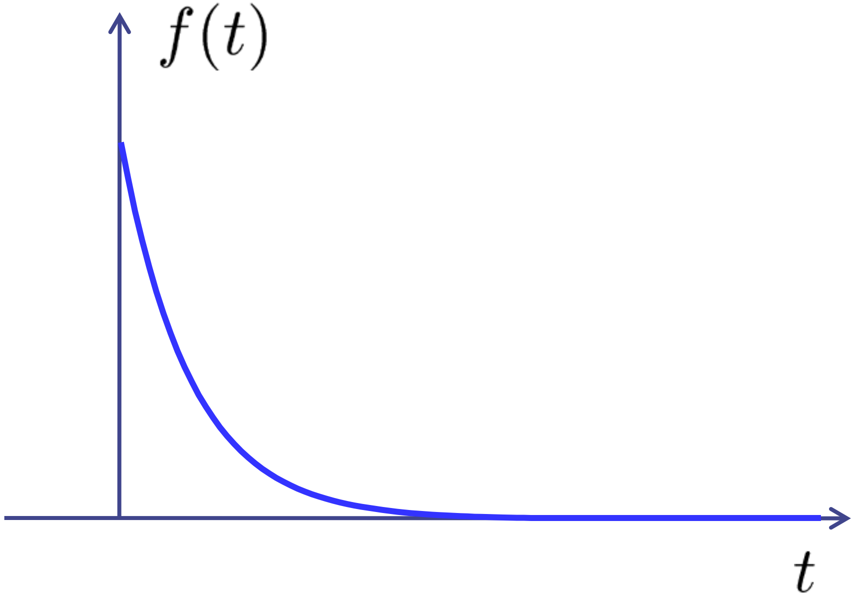
片側指数関数のFourier変換

- $f(t) = e^{-\alpha t}$

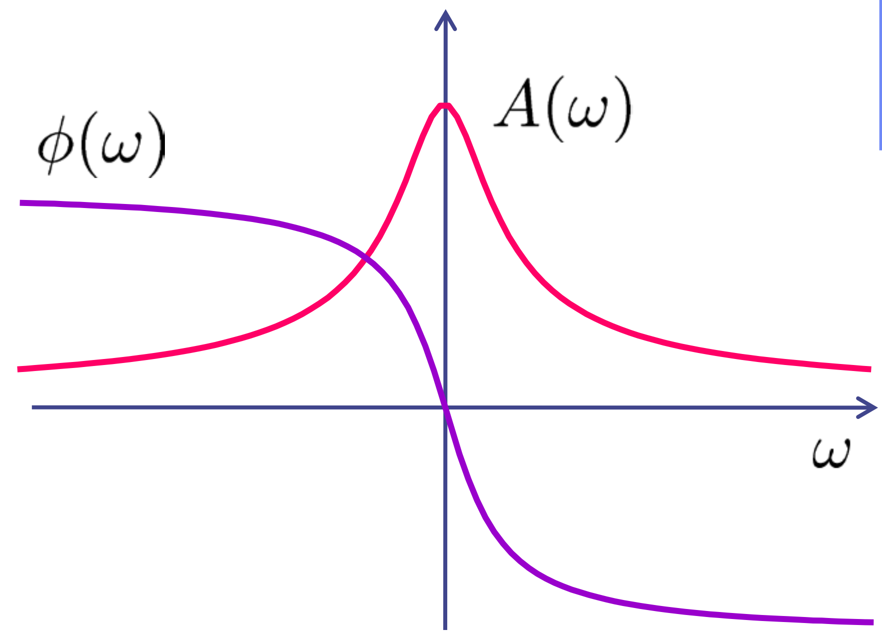


片側指数関数のFourier変換

- $f(t) = e^{-\alpha t}$



$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} e^{-j\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)}$$



$$\boxed{e^{-\alpha t}U(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad (\alpha > 0)}$$

片側指数関数のFourier変換の証明

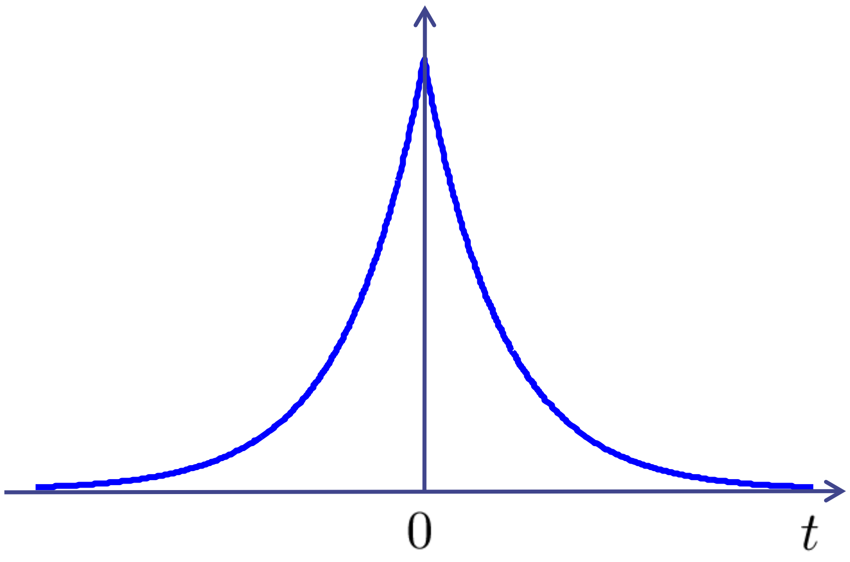
$$\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} U(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

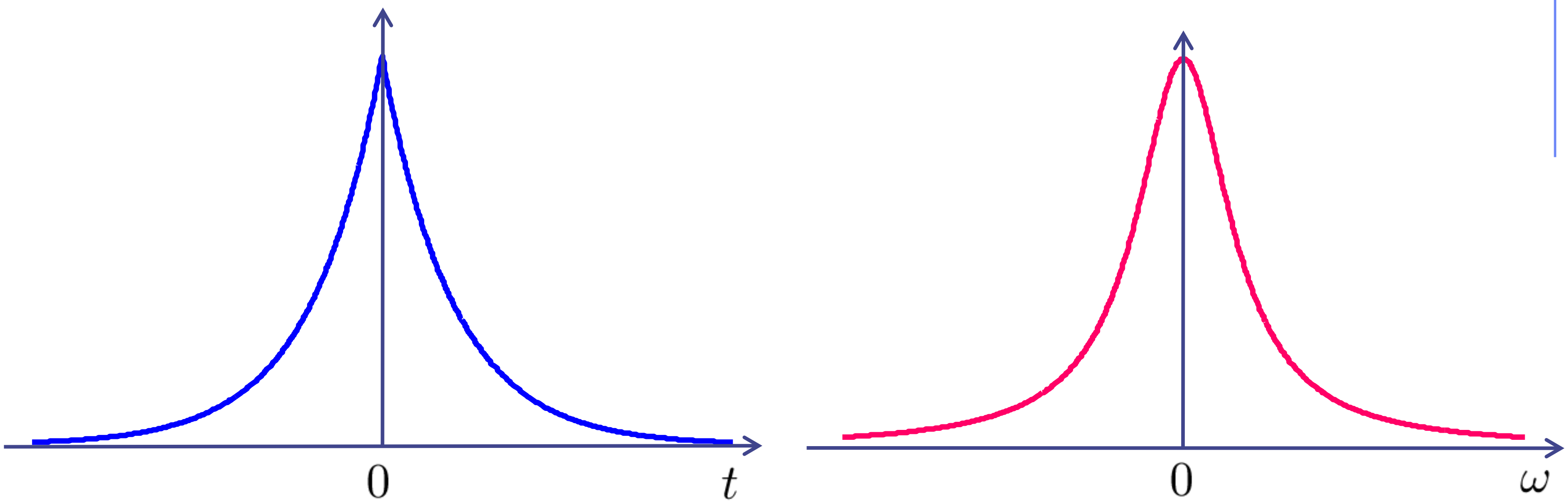
両側指数関数のFourier変換

- $f(t) = e^{-\alpha|t|}$



両側指数関数のFourier変換

- $f(t) = e^{-\alpha|t|}$



$$e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \quad (\alpha > 0)$$

両側指数関数のFourier変換の証明

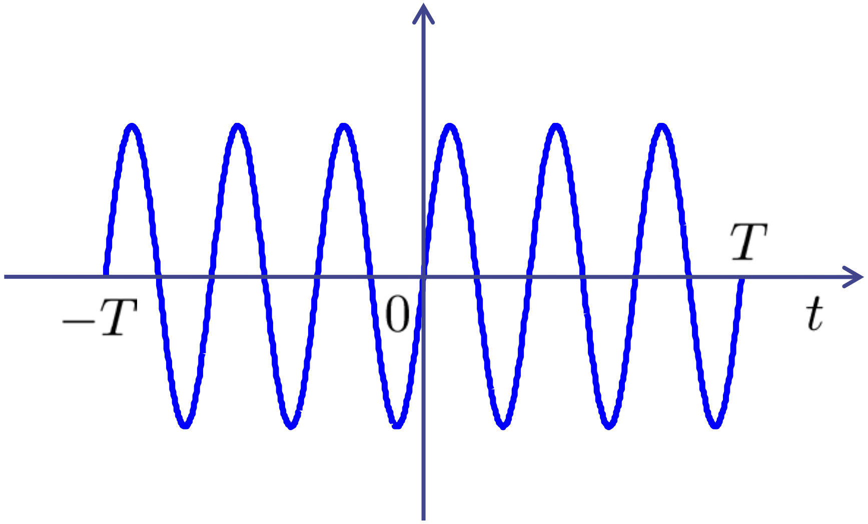
$$\because \mathcal{F}[e^{-\alpha t}U(t) + e^{\alpha t}U(-t)]$$

$$= \frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\alpha - j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t}U(-t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega)t}dt = \frac{1}{\alpha - j\omega}$$

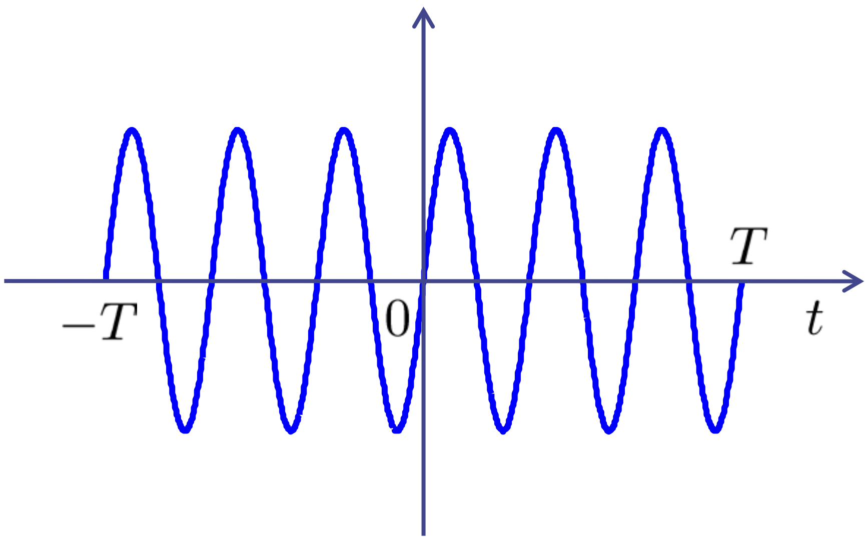
有限時間正弦波のFourier変換

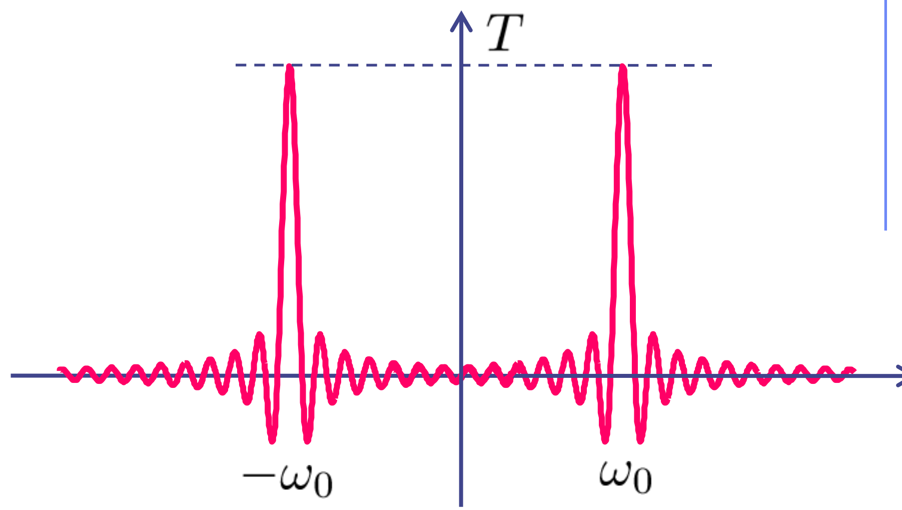
- $f(t) = P_T(t)\cos\omega_0 t$



有限時間正弦波のFourier変換

- $f(t) = P_T(t)\cos\omega_0 t$





$$P_T(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{\sin(\omega+\omega_0)T}{\omega+\omega_0} + \frac{\sin(\omega-\omega_0)T}{\omega-\omega_0}$$

有限時間正弦波のFourier変換の証明

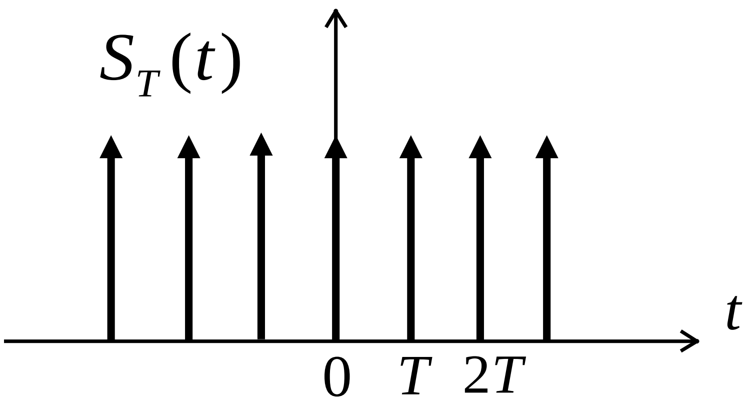
$$\because \ \mathcal{F}\left[P_T(t)\ \cos\ \omega_0\ t\right] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[P_T(t)\right] * \mathcal{F}\left[\cos\ \omega_0\ t\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{2\sin\omega T}{\omega} * \left[\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$= \frac{\sin(\omega+\omega_0)T}{\omega+\omega_0} + \frac{\sin(\omega-\omega_0)T}{\omega-\omega_0}$$

周期δ関数のFourier変換

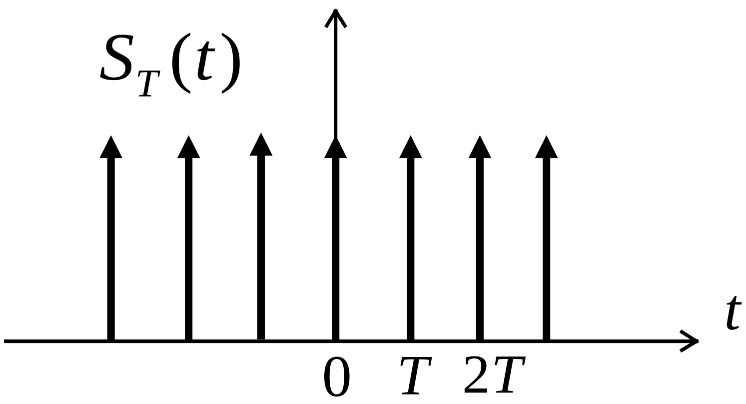
- $$f(t) = S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

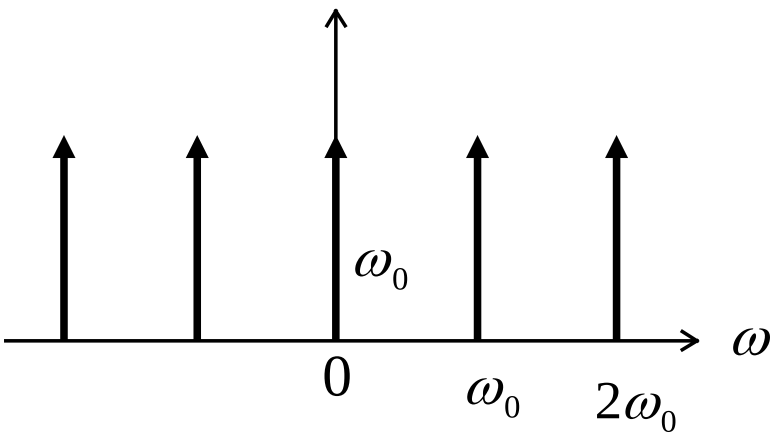


周期δ関数のFourier変換

- $$f(t) = S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$F(\omega) = \omega_0 S_{\omega_0}(\omega)$$





$$\boxed{\begin{aligned} S_T(t) &\leftrightarrow \omega_0 S_{\omega_0}(\omega) \\ \omega_0 &= 2\pi/T \end{aligned}}$$

周期δ関数のFourier変換の証明1

$$S_T(t) \longleftrightarrow \omega_0 S_{\omega_0}(\omega)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \qquad = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

これを示せれば

$$\stackrel{?}{=} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

これは明らか

$$\because e^{jat} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - a)$$

周期δ関数のFourier変換の証明2

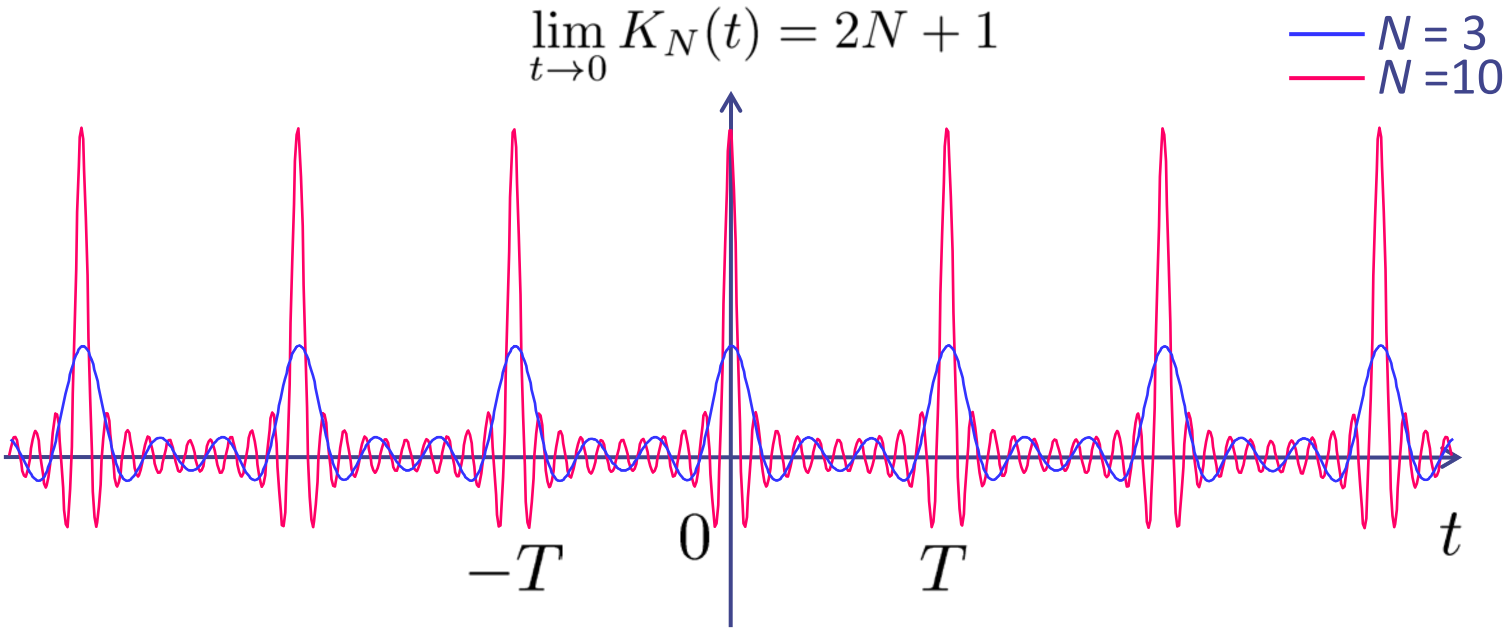
$$
\begin{aligned}
K_N(t) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} e^{jn\omega_0 t} \\
&= \frac{e^{j(N+1)\omega_0 t} - e^{-jN\omega_0 t}}{T(e^{j\omega_0 t} - 1)} \cdot \frac{\boxed{e^{-\frac{j\omega_0 t}{2}}}}{\boxed{e^{-\frac{j\omega_0 t}{2}}}} \\
&= \frac{e^{j(N+\frac{1}{2})\omega_0 t} - e^{-j(N+\frac{1}{2})\omega_0 t}}{T(e^{\frac{j\omega_0 t}{2}} - e^{-\frac{j\omega_0 t}{2}})} = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{T\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

周期δ関数のFourier変換の証明3

$$K_N(t) = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{T\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}$$

周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

$$\lim_{t\to 0} K_N(t) = 2N+1$$



周期δ関数のFourier変換の証明4

区間 $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ で $K_N(t)\to\delta(t)$ を示せば

$\lim_{N\to\infty}K_N(t)=S_T(t)$ が成立

$$K_N(t)=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{T\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{Tt}\cdot\frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}$$

ここで, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{Tt}=\frac{\pi}{T}\delta(t)$

$$\because\ \delta(t)=\lim_{\omega\to\infty}\frac{\sin\omega t}{\pi t}$$

周期δ関数のFourier変換の証明5

$$\frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}$$ は区間 $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ で有界

$|t| < \frac{T}{2}$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} K_N(t) = \frac{\pi}{T}\frac{t}{\sin(\frac{\omega_0 t}{2})}\delta(t) = \frac{\pi}{T}\overset{\frac{2}{\omega_0}}{\overset{/\!/}{\boxed{\left.\frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}\right|_{t=0}}}}\delta(t)$$

$$= \delta(t)$$