

信号処理論第二 第2回 (10/10)

情報理工学系研究科システム情報学専攻

亀岡 弘和

kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp

講義予定

- 10/03: 第1回
- 10/10: 第2回
- 10/17: 第3回
- 10/24: 第4回
- 10/31: 休講
- 11/07: 第5回
- 11/14: 第6回
- 11/21: 第7回
- 11/28: 第8回
- 12/07: 第9回
- 12/12: 第10回
- 12/19: 第11回
- 01/09: 第12回
- 01/16: 授業休止日
- 01/23: 第13回
- 01/30: 期末試験

講義内容

- δ 関数再考
- δ 関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

講義資料と成績評価

- 講義資料

- <http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/sp2/>

- 成績評価

- 出席点

- 学期末試験

前回の復習

- 導入：Fourier変換の重要性
 - 線形時不変システムの固有関数は複素正弦波
 - 複素正弦波の重ね合わせとして信号を表現するFourier変換はシステム論において基本的
- しかし、いくつかの重要な関数（定数関数，正弦波・・・）は通常関数の枠組みではFourier変換できない
→超関数の導入
- 超関数
 - 汎関数の一種
 - 形式的積分表現による各種演算の導入
 - 一般関数の超関数の解釈→不連続な微分なども扱える

参考書

- A. パポーリス, 工学のための応用フーリエ積分 – 超関数論への入門的アプローチ, 大槻, 平岡訳, オーム社(入手難)
- A. パポーリス, アナログとデジタルの信号解析, 町田, 村田訳, 現代工学社
- 片山 徹, 新版応用カルマンフィルタ, 朝倉書店

一般化された極限としての超関数

- 普通の関数の一般化された極限として超関数を定義することができる。

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \phi(t) dt = \phi(0)$$

δ 関数の例1

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma(t; \varepsilon)$$

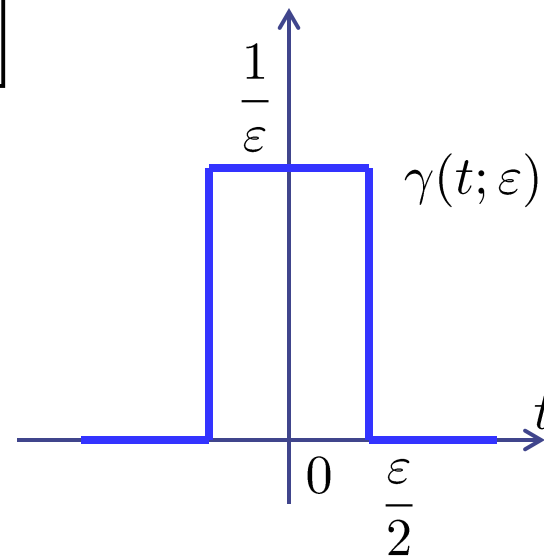
$$\gamma_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \left[U\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right) - U\left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]$$

$$\therefore \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t; \varepsilon) \phi(t) dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \phi(t) dt$$

$$\simeq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \phi(0) \varepsilon$$

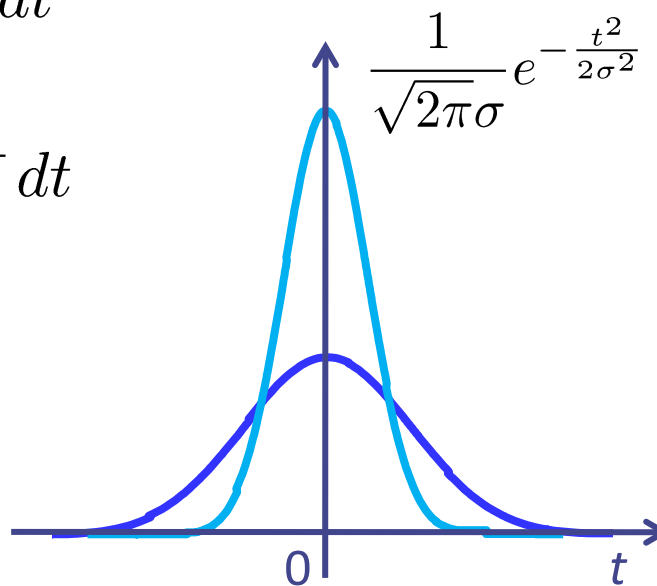
$$= \phi(0)$$



δ 関数の例2

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore & \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \phi(t) dt \\ & \simeq \lim_{\sigma \rightarrow 0} \phi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \\ & = \phi(0) \end{aligned}$$



δ関数の例3

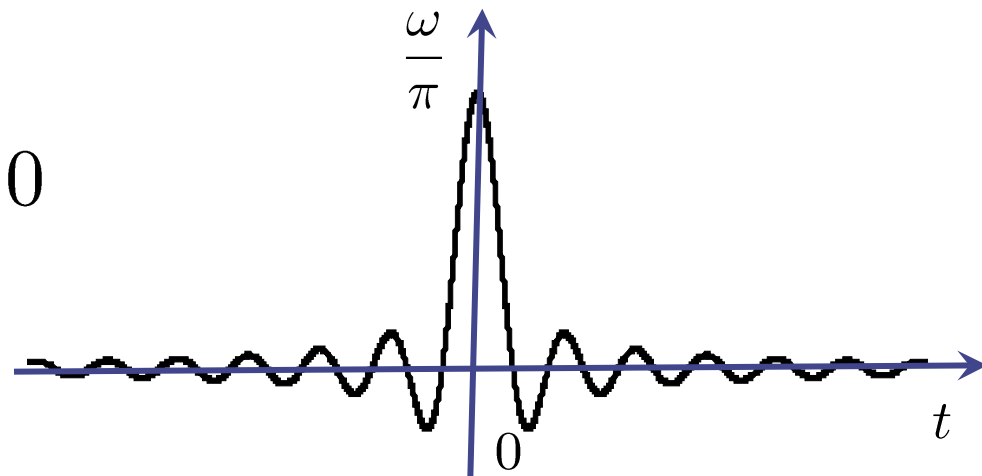
$$\delta(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t}$$

■ いまままでの例と違い

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0 \quad t \neq 0$$

でないことに注意。

つまり上式は、δ関数の定義に必要な条件ではない。



$\delta(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t}$ の証明

$$\therefore \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t} \phi(t) dt$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t} \phi(t) dt \right]$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin \omega t}{\pi t} \phi(t) dt$$

$$\approx \lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin \omega t}{\pi t} dt$$

$$= \phi(0) \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon \omega}^{\varepsilon \omega} \frac{\sin x}{\pi x} dx$$

$$= \phi(0) = 1$$

$= 0$

$\frac{\phi(t)}{t}$ は区間 $(-\infty, \varepsilon)$ と (ε, ∞) において
積分可能であるから、
Riemann-Lebesgue の補助定理より
 $\omega \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

Fourier核 $(\sin x)/x$ の積分

■ $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ の証明

■ $\int_C \frac{e^z}{z} dz$

$$= \int_{-r}^{-r_0} \frac{e^{jy}}{jy} j dy + \int_{\Gamma_0} \frac{e^z}{z} dz + \int_{r_0}^r \frac{e^{jy}}{jy} j dy + \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} dz$$

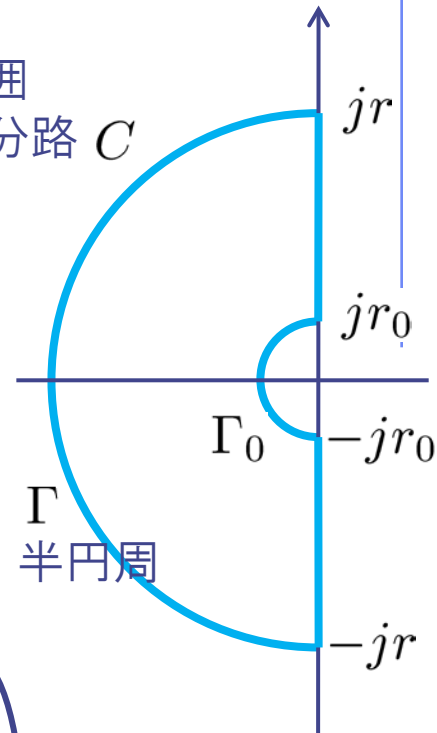
$$\begin{array}{ccc} \rightarrow -j\pi & & \rightarrow 0 \\ (r_0 \rightarrow 0) & & (r \rightarrow \infty) \end{array}$$

$$\rightarrow \int_0^{\infty} \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{y} dy - j\pi \quad (r_0 \rightarrow 0 \quad r \rightarrow \infty)$$

$$\sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}$$

= 0 (Cにおいて解析的のため)

周囲
積分路 C



Γ
半円周

Jordanの補助定理

$t > 0$ のとき

$$\int_{\Gamma} e^{tz} f(z) dz \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

誤った δ 関数の定義

- よく用いられる δ 関数の定義のいくつかは正しくない

定義1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

定義2

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) dt = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0 \quad (t \neq 0)$$

$t=0$ で0となるようなテスト関数 $\phi(t)$ に対する超関数の意味での等号

なぜか？

定義1の反例

■ $\delta(t) + \delta'(t)$ も定義を満たすから

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi(t)dt &= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'(t)dt \\ &= -\phi'(0) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt &= 0 \\ \delta'(t) &= 0 \quad (t \neq 0) \end{aligned}$$

正しい δ 関数の定義

- 以下を用いれば、 δ 関数は一意に定義できる

定義3

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0)$$

定義4

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \phi(t) dt = \phi(0)$$



第2章： 超関数を考慮したフーリエ変換

Fourier変換対

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Fourier変換対の表記

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

Fourierスペクトル・エネルギースペクトル

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

$A(\omega)$: Fourier スペクトル, 振幅スペクトル

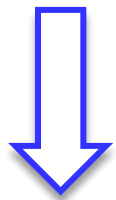
$A^2(\omega)$: エネルギースペクトル

$$A(\omega) = \sqrt{R(\omega)^2 + X(\omega)^2}$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

逆変換の証明: $f(t)$ が連続の場合

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right] f(\tau) d\tau \end{aligned}$$



$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t)$$

(次ページにて)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) f(\tau) d\tau = f(t)$$

複素指数関数の積分とδ関数の関係

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t d\omega \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \cos \omega t d\omega \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \omega t}{t} \right]_{-\Omega}^{\Omega} \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \Omega t}{t} \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} 2\pi \frac{\sin \Omega t}{\pi t} \\ &= 2\pi \delta(t)\end{aligned}$$

Fourier変換の実部と虚部

- $f(t) = f_R(t) + j f_I(t)$
 $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$

- $F(\omega) = R(\omega) + j I(\omega)$

$$\left\{ \begin{array}{l} R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_R(t) \cos \omega t + f_I(t) \sin \omega t] dt \\ I(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} [f_R(t) \sin \omega t - f_I(t) \cos \omega t] dt \end{array} \right.$$

- $f^*(t)$ のFourier変換: $F^*(-\omega)$

実関数のFourier変換

■
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \longrightarrow \text{偶関数} \quad \because R(-\omega) = R(\omega) \\ I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \longrightarrow \text{奇関数} \quad \because I(-\omega) = -I(\omega) \end{array} \right.$$

⇒
$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

$$\begin{aligned} \because F(-\omega) &= R(-\omega) + jI(-\omega) \\ &= R(\omega) - jI(\omega) \\ &= F^*(\omega) \end{aligned}$$

実関数の偶関数／奇関数への分解

- $f(t) = f_E(t) + f_O(t)$

- 偶関数成分 $f_E(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$

- 奇関数成分 $f_O(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$

偶関数/奇関数とFourier変換の実部虚部の関係

■ $f(t) \longleftrightarrow F(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$

$f_E(t) \longleftrightarrow R(\omega)$ 偶関数のFourier変換は実部のみ

$f_O(t) \longleftrightarrow jI(\omega)$ 奇関数のFourier変換は虚部のみ

$\therefore f(t) \longleftrightarrow R(\omega) + jI(\omega)$

$f(-t) \longleftrightarrow R(\omega) - jI(\omega)$

重畳積分の定義

■ $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

時間領域の重畳積分定理

■ $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)$

$$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$$



$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)$$

重畳積分定理の証明

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f_2(t - \tau) dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(t-\tau)} f_2(t - \tau) dt \right] d\tau \\ &= F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned}$$


$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_i(t)|^2 dt < \infty, i = 1, 2$$

ならば積分の順序が入れ替えられる

周波数領域の重畳積分定理

■ $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)$


$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$


$$f_1(t)f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

Parsevalの定理

- $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)$

- $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$


$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(-\omega) F_2(\omega) d\omega$$

- 特殊ケースとして...

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Parsevalの定理の証明

周波数領域での重畳定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega - y) dy$$

両辺で $\omega = 0$ とおき、 y を ω とかきかえると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(-\omega) d\omega$$

特に $f_2(t) = f_1^*(t)$ と選ぶと、 $F_2(\omega) = F_1^*(-\omega)$ なので

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(\omega)|^2 d\omega$$

Fourier変換の対称性

■ $f(t) \leftrightarrow F(\omega) \iff F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

■ 略証 \because

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi f(-\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} f(\omega') e^{-j\omega' t} (-d\omega') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega') e^{-j\omega' t} d\omega' \\ &= F(t) \end{aligned}$$

重要なFourier変換対と変換公式

■ 重要なFourier変換対

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n$$

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

符号関数

$$P_T(t) \leftrightarrow \frac{2 \sin T\omega}{\omega}$$

$-T \sim T$ の矩形関数

$$e^{-\alpha t^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

■ 原点シフト

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

■ 重畳積分定理

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)$$

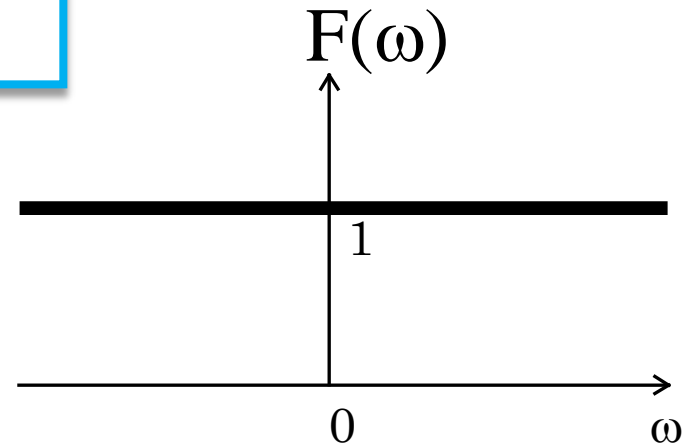
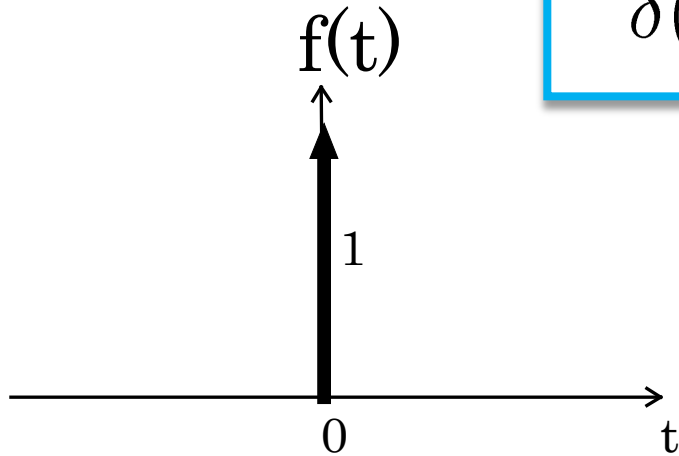
$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

■ 対称性

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

δ 関数のFourier変換1

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

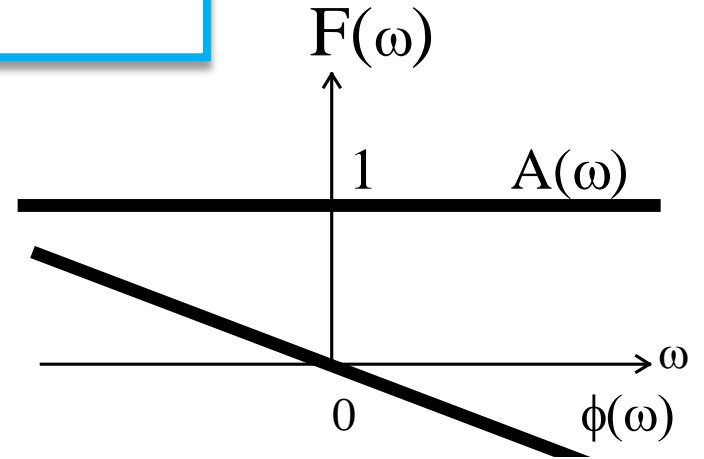
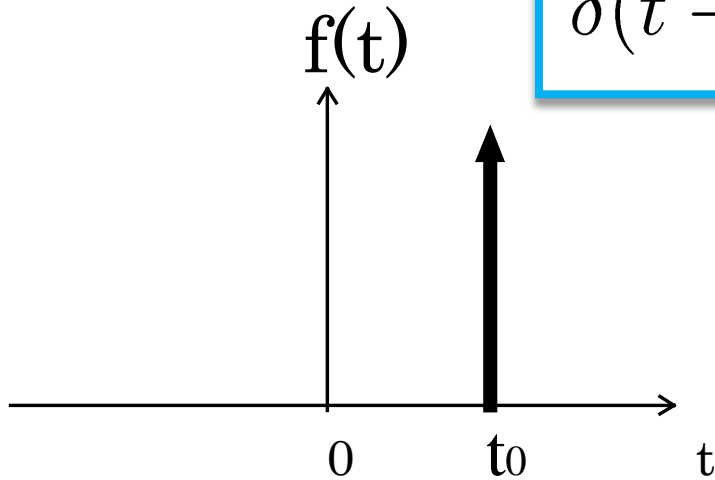


$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \delta(t)$$

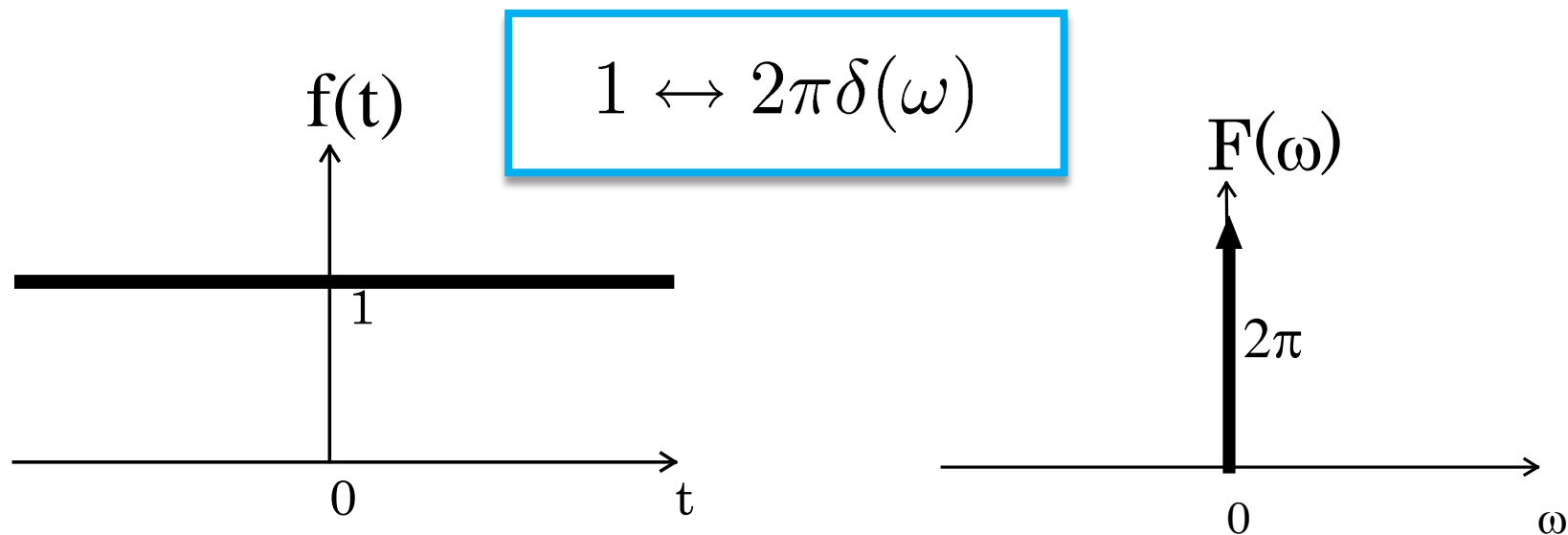
δ 関数のFourier変換2

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$



$\delta(t) \leftrightarrow 1$ の原点シフト

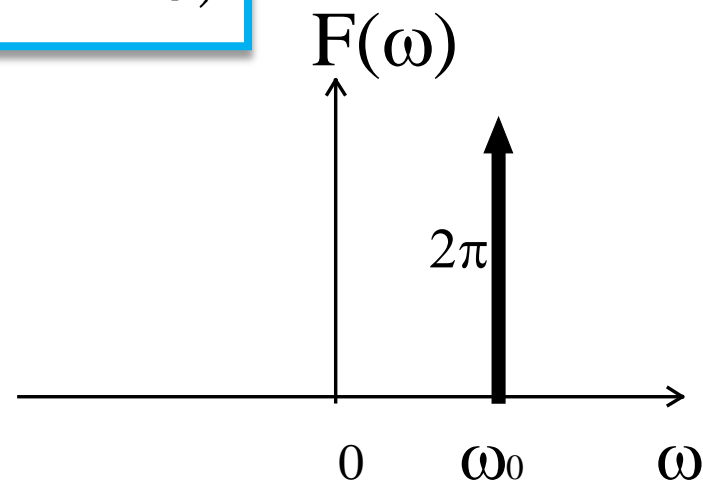
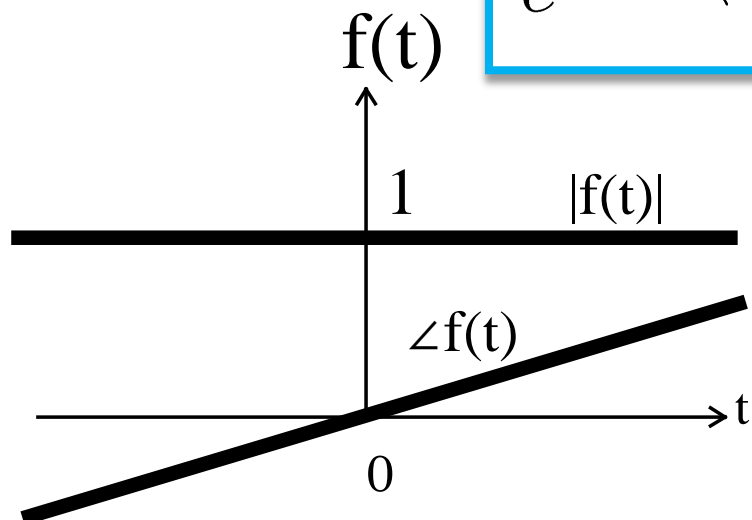
定数関数のFourier変換



$\because f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Leftrightarrow F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ において
 $f(t) = \delta(t), F(\omega) = 1$ とすると
 $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

複素正弦波のFourier変換

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$



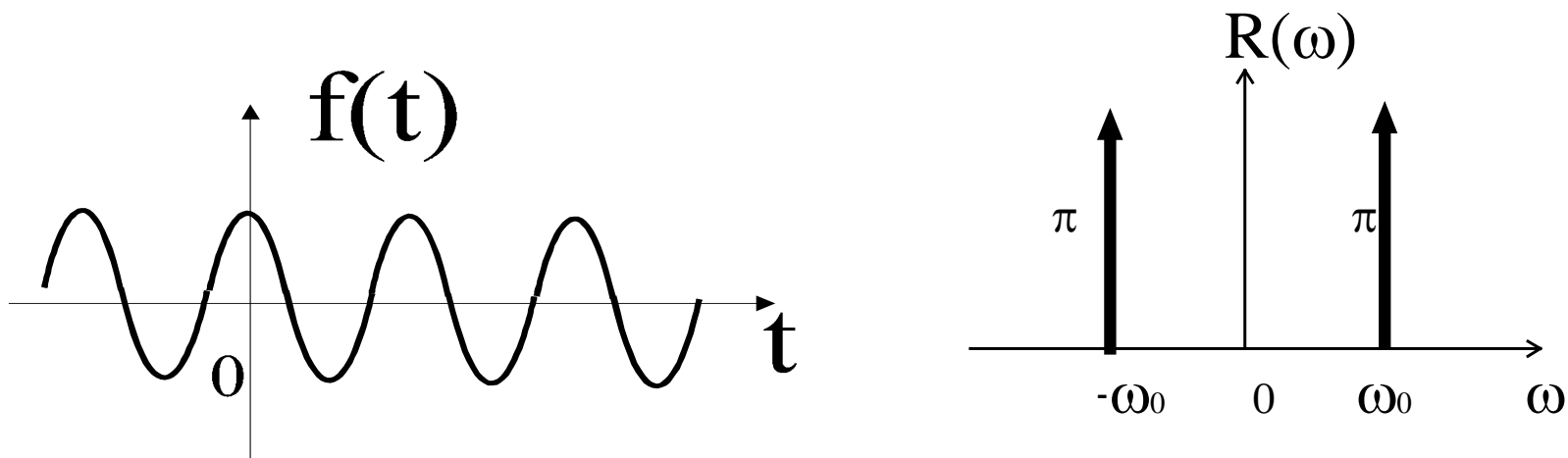
$\because f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Leftrightarrow F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ において

$f(t) = \delta(t - a), F(\omega) = e^{-j\omega a}$ とすると

$e^{-jat} \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega - a) = 2\pi\delta(\omega + a)$

$a = -\omega_0$ として, $e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

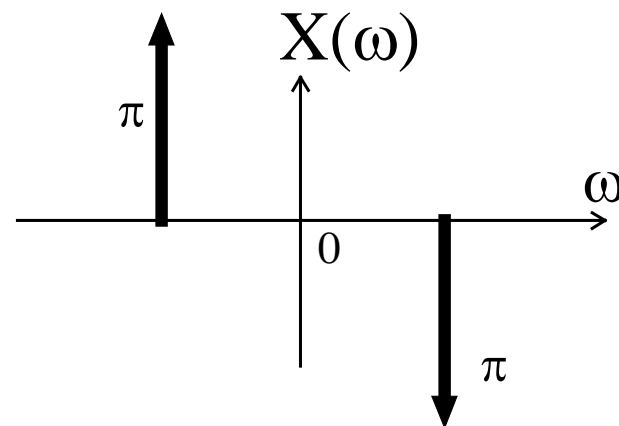
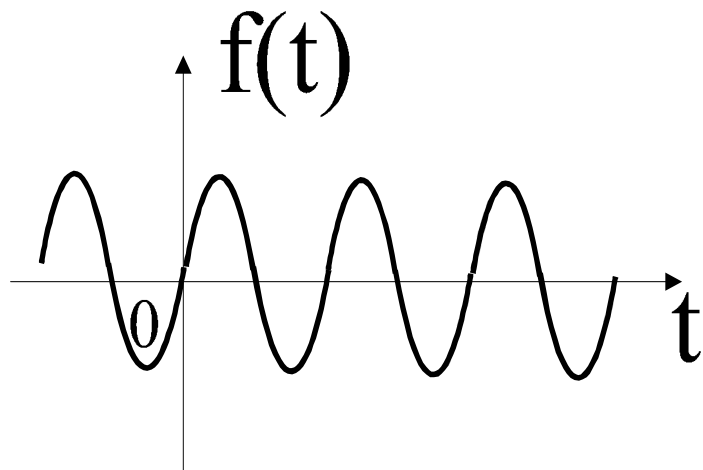
コサイン関数のFourier変換



$$\cos \omega_0 t \longleftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\mathcal{F} \left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right] = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

サイン関数のFourier変換



$$\sin \omega_0 t \longleftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\mathcal{F} \left[\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \right] = \frac{2\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

符号関数のFourier変換

$$\blacksquare f(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases}$$

- 奇関数より $R(\omega) = 0$

$$I(\omega) = -2 \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$$= -2 \int_0^{\infty} \sin \omega t dt$$

$$= \frac{-2}{\omega}$$

$$F(\omega) = jI(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$\because \int_0^{\infty} \sin \omega t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \sin \omega t dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \omega T}{\omega}$$

$$= \frac{1}{\omega}$$