信号処理論第二
第12回（1/24）

情報理工学系研究科システム情報学専攻
亀岡 弘和
kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp

講義資料

- http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/sp2/

離散時間Kalmanフィルタの問題設定

システムモデル： $x_k = \Phi_{k,k-1} x_{k-1} + \underbrace{B_k v_k}_{\text{駆動雑音}}$

測定モデル： $y_k = C_k x_k + \underbrace{w_k}_{\text{観測雑音}}$

k ： 時刻インデックス

- 仮定
  - v_k， w_k は互いに独立な正規白色雑音

$$\mathbb{E}[v_k] = 0 \qquad \mathbb{E}[v_k v_n^\top] = V_k \delta_{kn}$$

$$\mathbb{E}[w_k] = 0 \qquad \mathbb{E}[w_k w_n^\top] = W_k \delta_{kn}$$

$$\mathbb{E}[v_k w_n^\top] = 0$$

  - パラメータ: $\Phi_{k,k-1}, B_k, C_k$ と、雑音共分散 V_k, W_k は既知

離散時間Kalmanフィルタの構成

状態推定値

$$\hat{x}_{k-1|k-1} \Rightarrow \hat{x}_{k|k-1} \Rightarrow \hat{x}_{k|k}$$

時刻k-1までの観測値を用いた時刻k-1の状態推定値

時間更新

時刻k-1までの観測値を用いた時刻kの状態推定値

計測更新

時刻kまでの観測値を用いた時刻kの状態推定値

観測値 y_k

離散時間Kalmanフィルタの目的と導出方針

- 目的
  - $\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}$ と y_k から $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}$ を逐次的に計算したい
  - ただし $P_{n|m} = \mathrm{cov}(x_n - \hat{x}_{n|m})$

<u>逐次更新アルゴリズム</u>

$$
\begin{tikzcd}
 & & y_k \arrow[d] \\
\hat{x}_{k-1|k-1} \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\text{①}"] & \hat{x}_{k|k-1} \arrow[r, "\text{②}"] & \hat{x}_{k|k} \\
P_{k-1|k-1} \arrow[r] & P_{k|k-1} \arrow[ur] \arrow[r, "\text{③}"'] & P_{k|k}
\end{tikzcd}
$$

①状態の時間更新

- $\hat{x}_{k-1|k-1} \longrightarrow \hat{x}_{k|k-1}$

$$\boxed{\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1}\hat{x}_{k-1|k-1}}$$

- $P_{k-1|k-1} \longrightarrow P_{k|k-1}$

$$\begin{aligned} P_{k|k-1} &= \mathrm{cov}(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \\ &= \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})^{\mathsf{T}}] \\ &= \Phi_{k,k-1}P_{k-1|k-1}\Phi_{k,k-1}^{\mathsf{T}} + \underbrace{B_k V_k B_k^{\mathsf{T}}}_{\text{時間更新による分散の増分}} \end{aligned}$$

離散時間Kalmanフィルタの目的と導出方針

目的

- $\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}$ と y_k から $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}$ を逐次的に計算したい
- ただし $P_{n|m} = \mathrm{cov}(x_n - \hat{x}_{n|m})$

<u>逐次更新アルゴリズム</u>

$$
\begin{tikzcd}
 & & y_k \arrow[d] \\
\hat{x}_{k-1|k-1} \arrow[r] & \hat{x}_{k|k-1} \arrow[r, "②"] & \hat{x}_{k|k} \\
P_{k-1|k-1} \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "①"] & P_{k|k-1} \arrow[r, "③"'] \arrow[ur] & P_{k|k}
\end{tikzcd}
$$

②状態の計測更新

- $\hat{x}_{k|k-1}$， $y_k \longrightarrow \hat{x}_{k|k}$
  - イノベーション（観測値に対する予測の誤差）

$$\mu_k = y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}$$

  - 更新式

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \underline{K_k} \mu_k$$

Kalmanゲイン（未知）

（参考）（θ ,y)がガウス分布に従うとき

$$\theta_{\mathrm{MMSE}} = \mathbb{E}[\theta|y] = \bar{\theta} + A_0(y - \bar{y})$$

②最適Kalmanゲインの導出

- Kalmanゲインを決定する最適化問題

$$\mathbb{E}[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_2^2] \to \mathrm{minimize}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_2^2] &= \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})^\mathsf{T}(x_k - \hat{x}_{k|k})] \\ &= \mathrm{tr}\left(\mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^\mathsf{T}]\right) \\ &= \mathrm{tr}(\underline{P_{k|k}})\end{aligned}$$

Kalmanゲインを
導出するのに必要

離散時間Kalmanフィルタの目的と導出方針

目的

- $\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}$ と y_k から $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}$ を逐次的に計算したい
- ただし $P_{n|m} = \mathrm{cov}(x_n - \hat{x}_{n|m})$

<u>逐次更新アルゴリズム</u>

$$
\begin{tikzcd}
 & & y_k \arrow[d] \\
\hat{x}_{k-1|k-1} \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\text{①}"] & \hat{x}_{k|k-1} \arrow[r, "\text{②}"] & \hat{x}_{k|k} \\
P_{k-1|k-1} \arrow[r] & P_{k|k-1} \arrow[r, "\text{③}"'] \arrow[ur] & P_{k|k}
\end{tikzcd}
$$

③状態推定値の誤差共分散の更新

- $P_{k|k-1} \longrightarrow P_{k|k}$

$$
\begin{aligned}
&P_{k|k} \\
&= \mathrm{cov}\left(x_k - \hat{x}_{k|k}\right) \\
&= \mathrm{cov}\left(x_k - (\hat{x}_{k|k-1} + K_k \underline{\mu_k})\right) \\
&= \mathrm{cov}\left(x_k - (\hat{x}_{k|k-1} + K_k (\underline{y_k} - C_k \hat{x}_{k|k-1}))\right) \\
&= \mathrm{cov}\left(\underline{x_k} - (\underline{\hat{x}_{k|k-1}} + K_k (C_k \underline{x_k} + w_k - C_k \underline{\hat{x}_{k|k-1}}))\right) \\
&= \mathrm{cov}\left((I - K_k C_k)(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) - K_k w_k\right) \\
&= \mathrm{cov}\left((I - K_k C_k)(x_k - \hat{x}_{k|k-1})\right) + \mathrm{cov}\left(K_k w_k\right) \\
&= (I - K_k C_k)\mathrm{cov}\left(x_k - \hat{x}_{k|k-1}\right)(I - K_k C_k)^{\mathsf{T}} + K_k \mathrm{cov}\left(w_k\right) K_k^{\mathsf{T}} \\
&= (I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^{\mathsf{T}} + K_k W_k K_k^{\mathsf{T}}
\end{aligned}
$$

$\because$ w は $x, \hat{x}$ と独立

②最適Kalmanゲインの導出

- Kalmanゲインを決定する最適化問題

$$\mathbb{E}[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_2^2] \to \mathrm{minimize}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_2^2] &= \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})^\mathsf{T}(x_k - \hat{x}_{k|k})] \\ &= \mathrm{tr}\left(\mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^\mathsf{T}]\right) \\ &= \mathrm{tr}\underline{(P_{k|k})}\end{aligned}$$

$$= \mathrm{tr}\left((I - K_k C_k)P_{k|k-1}(I - K_k C_k)^\mathsf{T} + K_k W_k K_k^\mathsf{T}\right)$$

②最適Kalmanゲインの導出

◆最適化規準

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(P_{k|k}) &= \mathrm{tr}\big((I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^\top + K_k W_k K_k^\top\big) \\ &= \mathrm{tr}\big(P_{k|k-1} - \underline{K_k} C_k P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C_k^\top \underline{K_k^\top} \\ &\qquad + \underline{K_k} C_k P_{k|k-1} C_k^\top \underline{K_k^\top} + \underline{K_k} W_k \underline{K_k^\top}\big)\end{aligned}$$

- $\mathrm{tr}(P_{k|k})$ を最小化する K_k は $\dfrac{\partial \mathrm{tr}(P_{k|k})}{\partial K_k} = 0$ を満たす

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{tr}(P_{k|k})}{\partial K_k} &= -2P_{k|k-1} C_k^\top + 2K_k (C_k P_{k|k-1} C_k^\top + W_k) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore \hat{K}_k = P_{k|k-1} C_k^\top (C_k P_{k|k-1} C_k^\top + W_k)^{-1}$$

③最適Kalmanゲインにおける推定誤差共分散

- $P_{k|k}$ に $\hat{K}_k$ を代入

$$P_{k|k} = (I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^{\mathsf{T}} + K_k W_k K_k^{\mathsf{T}}$$

$$\hat{K}_k = P_{k|k-1} C_k^{\mathsf{T}} (C_k P_{k|k-1} C_k^{\mathsf{T}} + W_k)^{-1}$$

（最適Kalmanゲイン）

$$\hat{K}_k (C_k P_{k|k-1} C_k^{\mathsf{T}} + W_k) \hat{K}_k^{\mathsf{T}} = P_{k|k-1} C_k^{\mathsf{T}} \hat{K}_k^{\mathsf{T}}$$

$$P_{k|k} = (I - \hat{K}_k C_k) P_{k|k-1}$$

離散時間Kalmanフィルタのまとめ

$$
\begin{tikzcd}
& & y_k \arrow[d] \\
\hat{x}_{k-1|k-1} \arrow[r] & \hat{x}_{k|k-1} \arrow[r, "\textcircled{2}"] & \hat{x}_{k|k} \\
P_{k-1|k-1} \arrow[r, "\textcircled{1}"] & P_{k|k-1} \arrow[r, "\textcircled{3}"'] \arrow[ur] & P_{k|k}
\end{tikzcd}
$$

①
$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{k|k-1} &= \Phi_{k,k-1}\hat{x}_{k-1|k-1} \\
P_{k|k-1} &= \Phi_{k,k-1}P_{k-1|k-1}\Phi_{k,k-1}^{\mathsf{T}} + B_k V_k B_k^{\mathsf{T}}
\end{aligned}
$$

②
$$
\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1}C_k^{\mathsf{T}}(C_k P_{k|k-1} C_k^{\mathsf{T}} + W_k)^{-1} (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})
$$

③
$$
P_{k|k} = (I - P_{k|k-1}C_k^{\mathsf{T}}(C_k P_{k|k-1} C_k^{\mathsf{T}} + W_k)^{-1} C_k) P_{k|k-1}
$$

離散時間KalmanフィルタのBayes的解釈

$$\boxed{p(x_{k-1}|y_{1:k-1})} = \mathcal{N}(\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1})$$

システムモデルより:

$$\underline{p(x_k|x_{k-1})} = \mathcal{N}(\Phi_{k,k-1}x_{k-1}, B_k V_k B_k^\mathsf{T})$$

計測モデルより:

$$\underline{p(y_k|x_k)} = \mathcal{N}(C_k x_k, W_k)$$

時間更新 $\underline{p(x_k|y_{1:k-1})} = \int \underline{p(x_k|x_{k-1})}\boxed{p(x_{k-1}|y_{1:k-1})}\mathrm{d}x_{k-1}$

計測更新 $\boxed{p(x_k|y_{1:k})} = \dfrac{\underline{p(y_k|x_k)}\,\underline{p(x_k|y_{1:k-1})}}{p(y_k|y_{1:k-1})}$

$$= \frac{\underline{p(y_k|x_k)}\,\underline{p(x_k|y_{1:k-1})}}{\int \underline{p(y_k|x_k)}\,\underline{p(x_k|y_{1:k-1})}\mathrm{d}x_k}$$

$$\boxed{p(x_k|y_{1:k})} = \mathcal{N}(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$$