

# 信号処理論第二 第12回(1/24)

情報理工学系研究科システム情報学専攻

亀岡 弘和

[kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp](mailto:kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp)

# 講義資料

◆ <http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/sp2/>

# 離散時間Kalmanフィルタの問題設定

$$\text{システムモデル: } x_k = \Phi_{k,k-1}x_{k-1} + \underline{B_k}v_k$$

駆動雑音

$$\text{測定モデル: } y_k = C_kx_k + \underline{w_k}$$

観測雑音

- 仮定  $k$ : 時刻インデックス
  - $v_k, w_k$  は互いに独立な正規白色雑音
$$\mathbb{E}[v_k] = 0 \quad \mathbb{E}[v_k v_n^T] = V_k \delta_{kn}$$
$$\mathbb{E}[w_k] = 0 \quad \mathbb{E}[w_k w_n^T] = W_k \delta_{kn}$$
$$\mathbb{E}[v_k w_n^T] = 0$$
  - パラメータ:  $\Phi_{k,k-1}, B_k, C_k$  と、雑音共分散  $V_k, W_k$  は既知

# 離散時間Kalmanフィルタの構成

## 状態推定値

$$\hat{x}_{k-1|k-1}$$

時刻k-1までの  
観測値を  
用いた時刻k-1  
の状態推定値



時間  
更新

$$\hat{x}_{k|k-1}$$

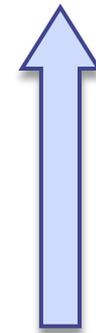
時刻k-1までの  
観測値を  
用いた時刻k  
の状態推定値



計測  
更新

$$\hat{x}_{k|k}$$

時刻kまでの  
観測値を  
用いた時刻k  
の状態推定値



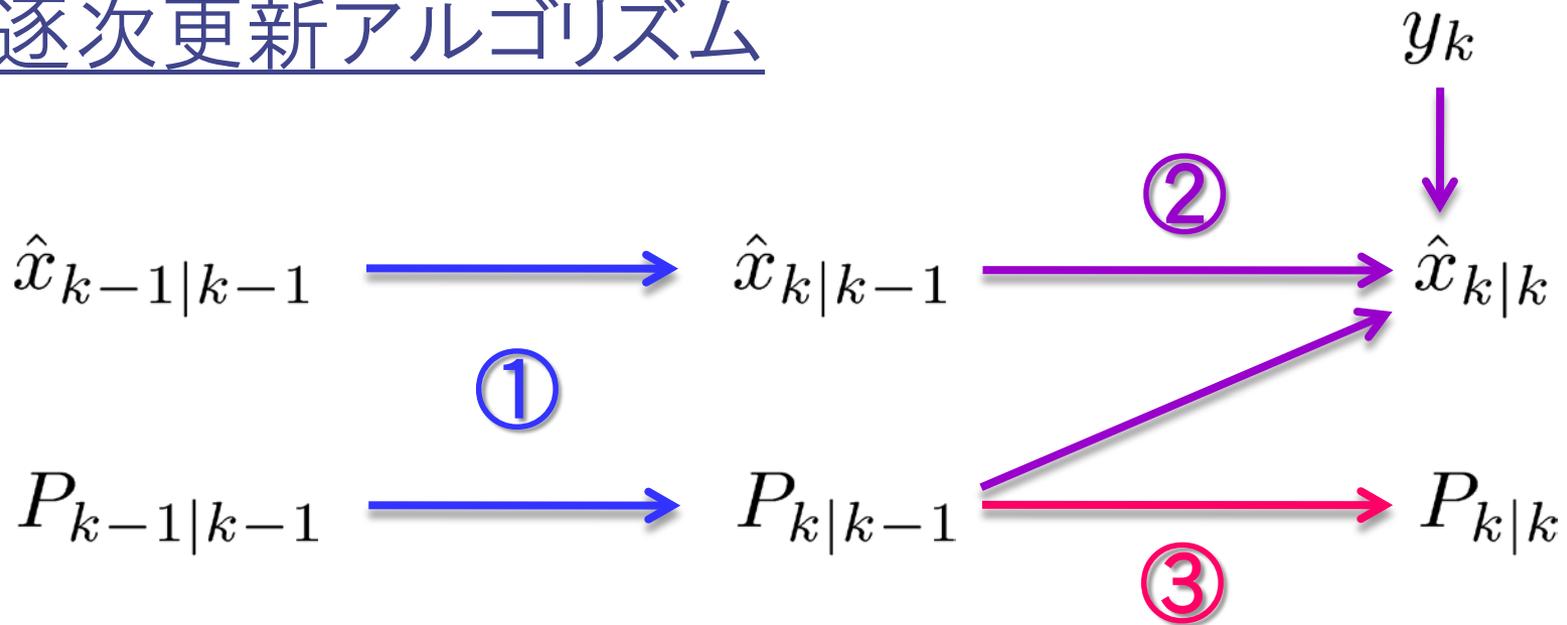
観測値  $y_k$

# 離散時間Kalmanフィルタの目的と導出方針

## ◆目的

- $\hat{x}_{k-1|k-1}$ ,  $P_{k-1|k-1}$  と  $y_k$  から  $\hat{x}_{k|k}$ ,  $P_{k|k}$  を逐次的に計算したい
- ただし  $P_{n|m} = \text{COV}(x_n - \hat{x}_{n|m})$

## 逐次更新アルゴリズム



# ①状態の時間更新

$$\diamond \hat{x}_{k-1|k-1} \longrightarrow \hat{x}_{k|k-1}$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1|k-1}$$

$$\diamond P_{k-1|k-1} \longrightarrow P_{k|k-1}$$

$$\begin{aligned} P_{k|k-1} &= \text{COV}(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \\ &= \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})^\top] \\ &= \Phi_{k,k-1} P_{k-1|k-1} \Phi_{k,k-1}^\top + \underline{B_k V_k B_k^\top} \end{aligned}$$

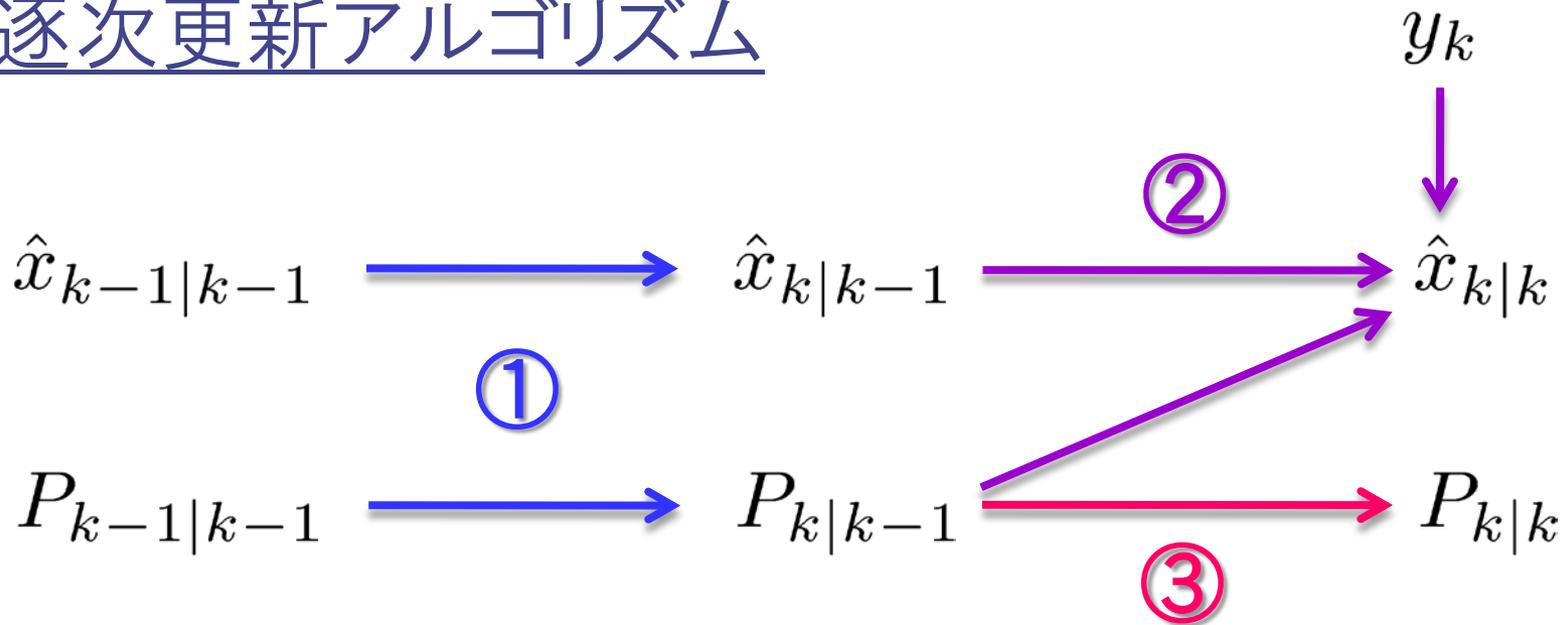
時間更新による分散の増分

# 離散時間Kalmanフィルタの目的と導出方針

## ◆目的

- $\hat{x}_{k-1|k-1}$ ,  $P_{k-1|k-1}$  と  $y_k$  から  $\hat{x}_{k|k}$ ,  $P_{k|k}$  を逐次的に計算したい
- ただし  $P_{n|m} = \text{COV}(x_n - \hat{x}_{n|m})$

## 逐次更新アルゴリズム



## ②状態の計測更新

$$\diamond \hat{x}_{k|k-1}, y_k \longrightarrow \hat{x}_{k|k}$$

- イノベーション(観測値に対する予測の誤差)

$$\mu_k = y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}$$



- 更新式

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \underline{K}_k \mu_k$$

Kalmanゲイン(未知)

(参考)  $(\theta, y)$ がガウス分布に従うとき

$$\theta_{\text{MMSE}} = \mathbb{E}[\theta|y] = \bar{\theta} + A_0(y - \bar{y})$$

## ②最適Kalmanゲインの導出

◆Kalmanゲインを決定する最適化問題

$$\mathbb{E}[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_2^2] \rightarrow \text{minimize}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_2^2] &= \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})^\top (x_k - \hat{x}_{k|k})] \\ &= \text{tr}(\mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^\top]) \\ &= \text{tr}(\underline{P_{k|k}})\end{aligned}$$

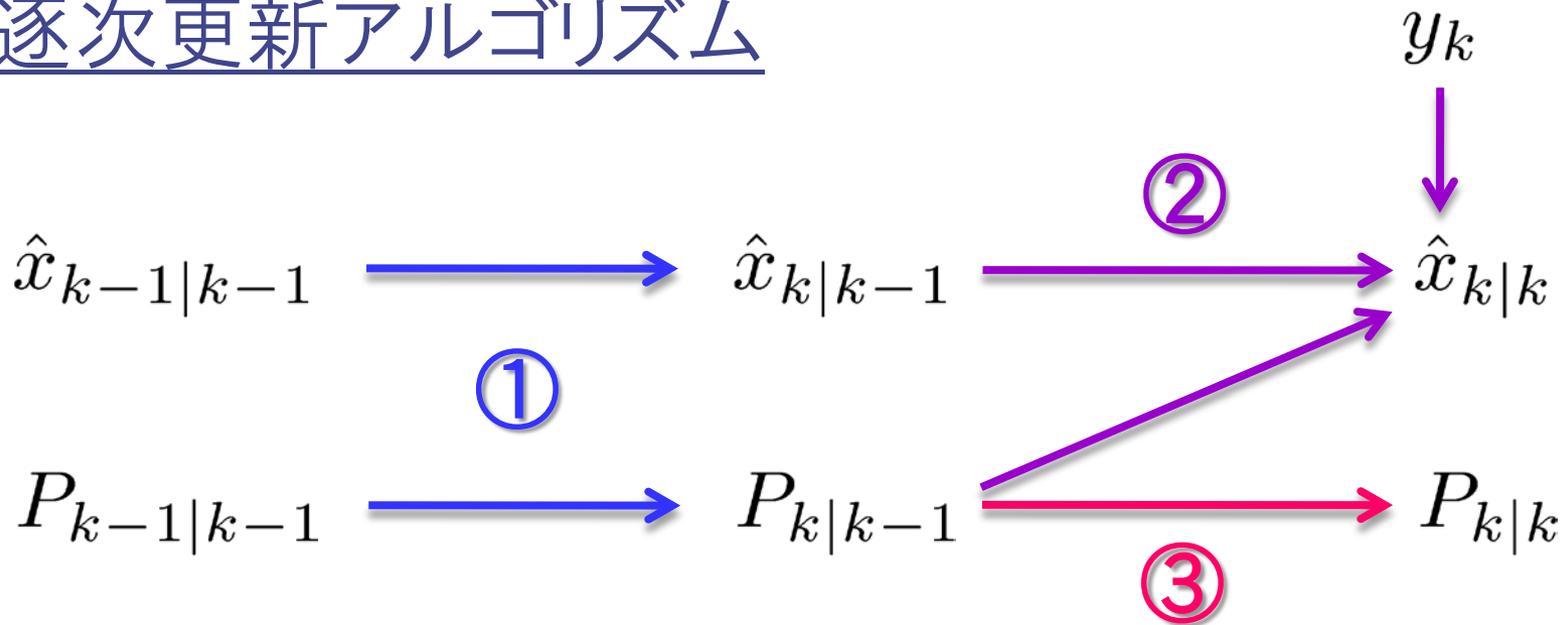
Kalmanゲインを  
導出するのに必要

# 離散時間Kalmanフィルタの目的と導出方針

## ◆目的

- $\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}$  と  $y_k$  から  $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}$  を逐次的に計算したい
- ただし  $P_{n|m} = \text{COV}(x_n - \hat{x}_{n|m})$

## 逐次更新アルゴリズム



### ③状態推定値の誤差共分散の更新

$$\diamond P_{k|k-1} \longrightarrow P_{k|k}$$

$$P_{k|k}$$

$$= \text{COV}(x_k - \hat{x}_{k|k})$$

$$= \text{COV}(x_k - (\hat{x}_{k|k-1} + K_k \underline{\mu}_k))$$

$$= \text{COV}(x_k - (\hat{x}_{k|k-1} + K_k (\underline{y}_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})))$$

$$= \text{COV}(\underline{x}_k - (\underline{\hat{x}}_{k|k-1} + K_k (C_k \underline{x}_k + w_k - C_k \underline{\hat{x}}_{k|k-1})))$$

$$= \text{COV}((I - K_k C_k)(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) - K_k w_k) \quad \because w \text{ は } x, \hat{x} \text{ と独立}$$

$$= \text{COV}((I - K_k C_k)(x_k - \hat{x}_{k|k-1})) + \text{COV}(K_k w_k)$$

$$= (I - K_k C_k) \text{COV}(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) (I - K_k C_k)^T + K_k \text{COV}(w_k) K_k^T$$

$$= (I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^T + K_k W_k K_k^T$$

## ②最適Kalmanゲインの導出

◆Kalmanゲインを決定する最適化問題

$$\mathbb{E}[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_2^2] \rightarrow \text{minimize}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|x_k - \hat{x}_{k|k}\|_2^2] &= \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})^\top (x_k - \hat{x}_{k|k})] \\ &= \text{tr}(\mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^\top]) \\ &= \text{tr}(\underline{P_{k|k}}) \\ &= \text{tr}((I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^\top + K_k W_k K_k^\top)\end{aligned}$$

## ②最適Kalmanゲインの導出

### ◆最適化規準

$$\begin{aligned}\text{tr}(P_{k|k}) &= \text{tr}\left((I - K_k C_k)P_{k|k-1}(I - K_k C_k)^\top + K_k W_k K_k^\top\right) \\ &= \text{tr}\left(P_{k|k-1} - \underline{K_k} C_k P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C_k^\top \underline{K_k}^\top \right. \\ &\quad \left. + \underline{K_k} C_k P_{k|k-1} C_k^\top \underline{K_k}^\top + \underline{K_k} W_k \underline{K_k}^\top\right)\end{aligned}$$

■  $\text{tr}(P_{k|k})$  を最小化する  $K_k$  は  $\frac{\partial \text{tr}(P_{k|k})}{\partial K_k} = 0$  を満たす

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{tr}(P_{k|k})}{\partial K_k} &= -2P_{k|k-1} C_k^\top + 2K_k (C_k P_{k|k-1} C_k^\top + W_k) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore \hat{K}_k = P_{k|k-1} C_k^\top (C_k P_{k|k-1} C_k^\top + W_k)^{-1}$$

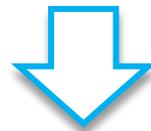
### ③最適Kalmanゲインにおける推定誤差共分散

◆  $P_{k|k}$  に  $\hat{K}_k$  を代入

$$P_{k|k} = (I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^T + K_k W_k K_k^T$$

$$\hat{K}_k = P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + W_k)^{-1}$$

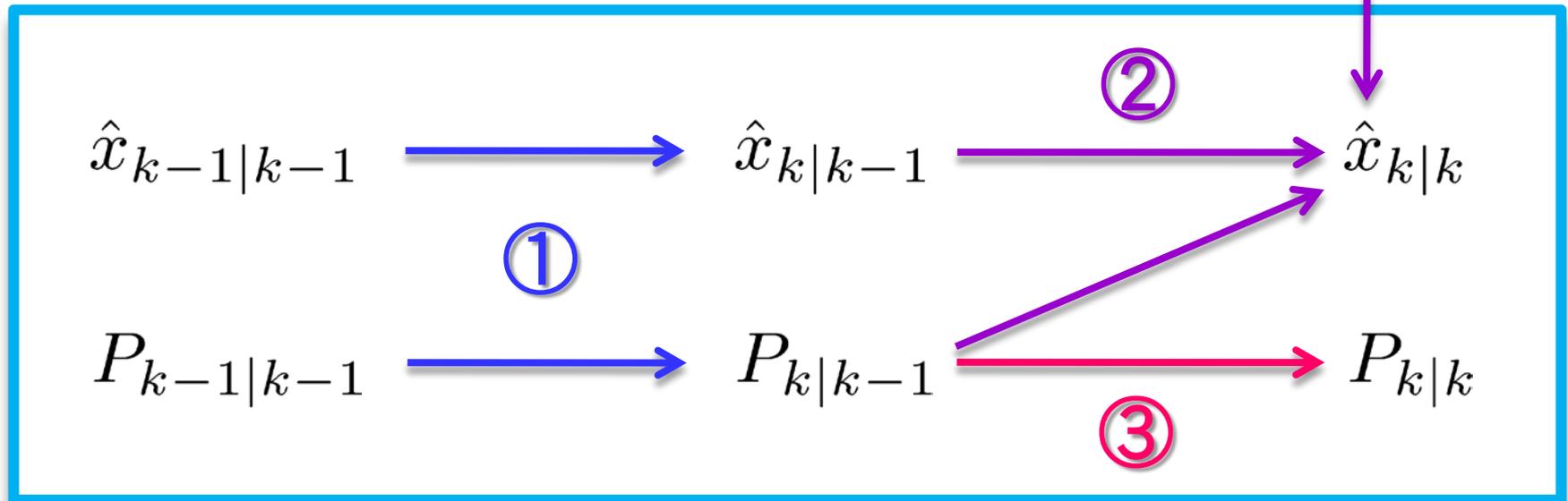
(最適Kalmanゲイン)



$$\hat{K}_k (C_k P_{k|k-1} C_k^T + W_k) \hat{K}_k^T = P_{k|k-1} C_k^T \hat{K}_k^T$$

$$P_{k|k} = (I - \hat{K}_k C_k) P_{k|k-1}$$

# 離散時間Kalmanフィルタのまとめ



- ① 
$$\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1|k-1}$$
$$P_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1|k-1} \Phi_{k,k-1}^T + B_k V_k B_k^T$$
- ② 
$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + W_k)^{-1} (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})$$
- ③ 
$$P_{k|k} = (I - P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + W_k)^{-1} C_k) P_{k|k-1}$$

# 離散時間KalmanフィルタのBayes的解釈

$$p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1})$$

システムモデルより:

$$p(x_k|x_{k-1}) = \mathcal{N}(\Phi_{k,k-1}x_{k-1}, B_k V_k B_k^\top)$$

計測モデルより:

$$p(y_k|x_k) = \mathcal{N}(C_k x_k, W_k)$$

時間更新  $p(x_k|y_{1:k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1}) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) dx_{k-1}$

計測更新  $p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})}$   
 $= \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})}{\int p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1}) dx_k}$

$$p(x_k|y_{1:k}) = \mathcal{N}(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$$