# 信号処理論第二
# 第11回 ( 1/17)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
亀岡 弘和
kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp

# 講義予定

- 10/04: 第1回
- 10/11: 第2回
- 10/18: 第3回
- 10/25: 第4回
- 11/01: 休講
- 11/08: 第5回
- 11/15: 第6回
- 11/22: 休講
- 11/29: 第7回
- 12/06: 第8回
- 12/13: 第9回
- 12/20: 休講
- 01/10: 第10回
- 01/17: 第11回
- 01/24: 第12回
- 01/31: 期末試験

# 講義内容

- δ関数再考
- δ関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

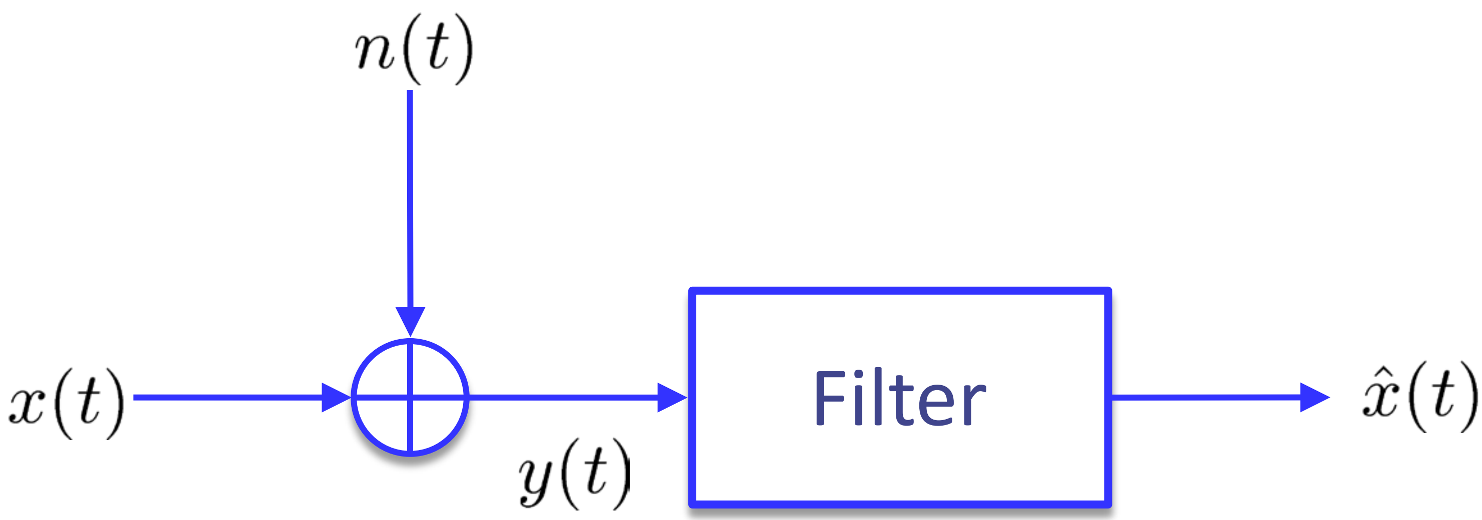
# 講義資料と成績評価

- 講義資料
  - http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/sp2/
- 成績評価
  - 出席点
  - 学期末試験

# 第9章 カルマンフィルタ

# 信号の推定問題

- 雑音が重畳する観測信号からどうやって信号成分を推定するか？



# Wiener Filter

- 観測信号y(t)から信号x(t)を推定する枠組み
- 線形時不変推定器:

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- 最小二乗規範:

$$J[h(t)] = \mathbb{E}[|\hat{x}(t) - x(t)|^2]$$

- y(t)、x(t)に対する定常性の仮定が必要

# 直交原理 (The Orthogonality Principle)

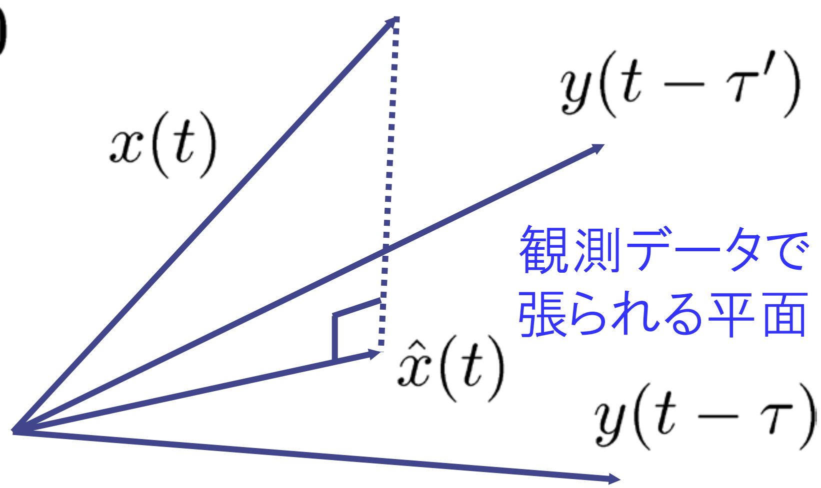
- 線形推定値 $\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) y(t-\alpha) \mathrm{d}\alpha$ が平均二乗誤差を最小とするとき，以下の直交原理が成り立つ

- 直交原理 I： 誤差は観測値と直交する

$$\mathbb{E}[\{x(t) - \hat{x}(t)\} y(t-\tau)] = 0$$

- 直交原理 II： 誤差は最適推定値と直交する

$$\mathbb{E}[\{x(t) - \hat{x}(t)\} \hat{x}(t)] = 0$$



# Kalman Filter

- 観測信号 $y(\tau)(t_0 \leq \tau < t)$ から状態 $x(t)$ を推定する枠組み
- 線形時変推定器:

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma) y(\sigma) d\sigma$$

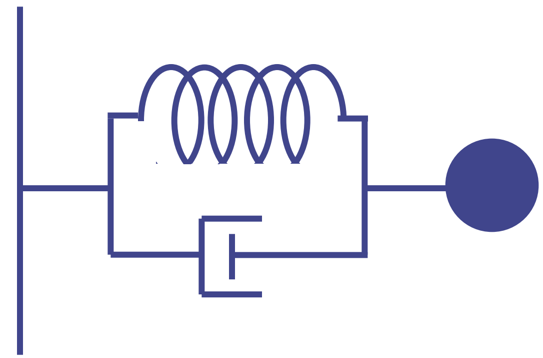
- 最小二乗規範:

$$J[h(t,\tau)] = \mathbb{E}[|\hat{x}(t) - x(t)|^2]$$

- 実際には、上記の時変インパルス応答を畳み込むことはなく、逐次的な推定が可能

# 測定対象に対するモデルの導入

- 例）バネマスダンパ系の質点位置の推定
  - バネマスダンパ系の質点が、ランダムな外力F(t)により駆動されている
  - 質点の位置は、観測雑音を含む測定器によって観測される



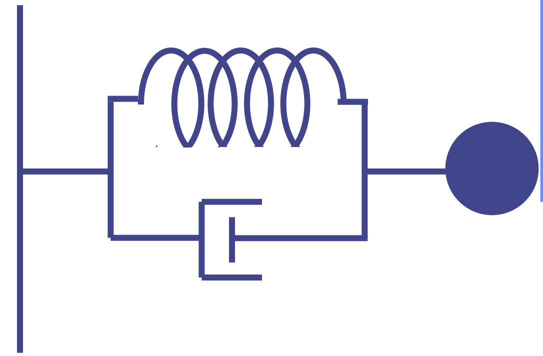
$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

$$y(t) = x(t) + \underbrace{w(t)}_{\text{観測雑音}}$$

# 状態空間表現への変形

- $m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$

  $y(t) = x(t) + w(t)$



1変数高階微分方程式表現から
多変数1階微分方程式表現へ

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\gamma/m) & -(k/m) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1/m)F(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

駆動雑音

$$y(t) = (0\ 1)\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + w(t)$$

観測雑音

状態空間表現

# Kalman Filterの問題設定

- 状態方程式: $$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)\underbrace{v(t)}_{\text{駆動雑音}}$$

  観測方程式: $$y(t) = C(t)x(t) + \underbrace{w(t)}_{\text{観測雑音}}$$

- 仮定
  - v(t)、w(t)は互いに独立な正規白色雑音

    $$E[v(t)] = 0 \qquad E[v(t)v^T(\tau)] = V\delta(t-\tau)$$
    $$E[w(t)] = 0 \qquad E[w(t)w^T(\tau)] = W\delta(t-\tau)$$
    $$E[v(t)w^T(\tau)] = 0$$

  - システムパラメータ:A(t),B(t),C(t)と、雑音共分散W,Vは既知
  - Wは逆行列をもつ

# Kalman Filterの導出

1) Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式の導出

2) 微分方程式への変形

3) xの逐次推定式の導出

4) Kalman ゲインの決定

5) 誤差共分散の更新式

# 1. Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式の導出

- $\hat{x}(t) = \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma)y(\sigma)d\sigma$ より

$$\mathbb{E}\left[\left\{x(t) - \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma)y(\sigma)d\sigma\right\} y^T(\tau)\right] = 0$$ 直交原理

$$(t_0 \leq \sigma < t)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbb{E}[x(t)y^\mathsf{T}(\tau)] = \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^\mathsf{T}(\tau)]d\sigma \quad (t_0 \leq \sigma < t)}$$

Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式

# 2. 微分方程式への変形：方針

- Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式

$$\mathbb{E}[x(t)y^{\mathsf{T}}(\tau)] = \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^{\mathsf{T}}(\tau)]d\sigma$$

- 両辺をtで微分し, システムのモデル(状態方程式)：

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t)$$

を適用して変形することを考える

# 2. 微分方程式への変形：左辺の微分

- 左辺を t で微分

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}[x(t)y^{\mathsf{T}}(\tau)]$$

$$=\mathbb{E}[\{A(t)x(t)+B(t)v(t)\}y^{\mathsf{T}}(\tau)]$$

$$=A(t)\mathbb{E}[\underline{x(t)}y^{\mathsf{T}}(\tau)]+B(t)\underbrace{\mathbb{E}[v(t)y^{\mathsf{T}}(\tau)]}_{=0}$$

$$=\int_{t_0}^{t}A(t)H(t,\sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^{\mathsf{T}}(\tau)]d\sigma$$

WHK方程式を適用

# 2. 微分方程式への変形：右辺の微分

- 右辺を t で微分

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^{t} H(t,\sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^{\mathsf{T}}(\tau)]d\sigma$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} H(t,\sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^{\mathsf{T}}(\tau)]d\sigma + H(t,t)\mathbb{E}[y(t)y^{\mathsf{T}}(\tau)]$$

Leibniz' Rule

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,x)dx = \int_{a}^{b}\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}dx + f(t,b)\frac{db}{dt} - f(t,a)\frac{da}{dt}$$

# 2. 微分方程式への変形：右辺の微分（続）

$$y(t) = C(t)x(t) + w(t)$$

- $\displaystyle \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} H(t,\sigma) E[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma + H(t,t) E[\underline{y(t)} y^T(\tau)]$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} H(t,\sigma) E[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma + H(t,t) C(t) \underline{E[x(t) y^T(\tau)]}$$

WHK方程式

$$+ H(t,t) \underline{E[w(t)\{x^T(\tau) C^T(\tau) + w^T(\tau)\}]}$$

$$E[w(t) x^T(\tau)] = 0 \ (\tau < t)$$
$$E[w(t) w^T(\tau)] = 0 \ (\tau < t)$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} H(t,\sigma) E[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma$$

$$+ \int_{t_0}^{t} H(t,t) C(t) H(t,\sigma) E[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma$$

WHK方程式 $$\boxed{E[x(t) y^T(\tau)] = \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma) E[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma}$$

# 2. 微分方程式への変形：導出

- 左辺の微分＝右辺の微分より

$$\int_{t_0}^{t} A(t)H(t,\sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^{\mathsf{T}}(\tau)]d\sigma$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t}H(t,\sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^{\mathsf{T}}(\tau)]d\sigma + \int_{t_0}^{t} H(t,t)C(t)H(t,\sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^{\mathsf{T}}(\tau)]d\sigma$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_0}^{t} G(t,\sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^{\mathsf{T}}(\tau)]d\sigma = 0 \qquad (t_0 \leq \sigma < t)$$

$$G(t,\sigma) = A(t)H(t,\sigma) - \frac{\partial}{\partial t}H(t,\sigma) - K(t)C(t)H(t,\sigma)$$

$$K(t) = H(t,t)$$

# 2. 微分方程式への変形：導出

- 再びWHK方程式に着目

$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma)E[y(\sigma)y^T(\tau)]d\sigma$$

$$\int_{t_0}^{t} G(t,\sigma)E[y(\sigma)y^T(\tau)]d\sigma = 0$$ より

$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^{t} \{H(t,\sigma) + G(t,\sigma)\}E[y(\sigma)y^T(\tau)]d\sigma$$

$H(t,\sigma) + G(t,\sigma)$ も、WHK方程式を満たす

# 2. 微分方程式への変形：導出

- よって以下の2つはどちらも最適推定値

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma)y(\sigma)d\sigma$$

$$\hat{x'}(t) = \int_{t_0}^{t} \{H(t,\sigma) + G(t,\sigma)\}y(\sigma)d\sigma$$

- これらの二乗誤差は0にならなければならない

$$E[\{\hat{x'}(t) - \hat{x}(t)\}\{\hat{x'}(t) - \hat{x}(t)\}^T] = 0$$

# 2. 微分方程式への変形：導出

- $\mathbb{E}[(\hat{x'}(t) - \hat{x}(t))(\hat{x'}(t) - \hat{x}(t))^\mathsf{T}]$

$$= \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} G(t,\sigma)\mathbb{E}[y(\sigma)y^\mathsf{T}(\tau)]G^\mathsf{T}(t,\tau)d\sigma d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} G(t,\sigma)C(t)\underbrace{\mathbb{E}[x(\sigma)x^\mathsf{T}(\tau)]}_{\text{半正定値}}C^\mathsf{T}(t)G^\mathsf{T}(t,\tau)d\sigma d\tau$$

$$+ \int_{t_0}^{t} G(t,\sigma)\underbrace{W}_{\text{正定値}}G^\mathsf{T}(t,\sigma)d\sigma$$

$$=0$$

よってこれが成り立つためには　　H(t,σ)の微分方程式

$$\boxed{G(t,\sigma) = A(t)H(t,\sigma) - \frac{\partial}{\partial t}H(t,\sigma) - K(t)C(t)H(t,\sigma) = 0}$$

# 3. $x$ の逐次推定式の導出

- $x$ の推定式

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma) y(\sigma) d\sigma$$

- 両辺を t で微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^{t} H(t,\sigma) y(\sigma) d\sigma \\ &= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} H(t,\sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t) y(t) \end{aligned}$$

# 3. xの逐次推定式の導出(続)

- $$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} H(t,\sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t) y(t)$$

  $$A(t)H(t,\sigma) - \frac{\partial}{\partial t} H(t,\sigma) - K(t)C(t)H(t,\sigma) = 0$$

の2式より

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} H(t,\sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t) y(t) \\
&= \{A(t) - K(t)C(t)\} \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t) y(t) \\
&= \{A(t) - K(t)C(t)\} \hat{x}(t) + K(t) y(t)
\end{aligned}$$

# Kalman-Bucy Filter

- $$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= [A(t) - K(t)C(t)]\hat{x}(t) + K(t)y(t) \\ &= \hat{x}(t_0) = x_0\end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \\ &= \hat{x}(t_0) = x_0\end{aligned}$$

# 4) Kalmanゲインの決定

$K(t) = H(t,t)$ を決定したい

方針：観測方程式 $y(\tau) = Cx(\tau) + w(\tau)$

に基づき、WHK方程式を変形

$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma)E[y(\sigma)y^T(\tau)]d\sigma$$

$$(t_0 \le \tau < t)$$

Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式

# 4) Kalmanゲインの決定：WHK方程式の変形

$$
\begin{aligned}
& E[x(t)y^T(\tau)] - \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma \\
= \quad & E[x(t)x^T(\tau)]C^T(\tau) - \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma) E[y(\sigma)x^T(\tau)]C^T(\tau) d\sigma \\
& - \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma) W \delta(\sigma - \tau) d\sigma \\
= \quad & E[\{x(t) - \hat{x}(t)\}x^T(\tau)]C^T(\tau) - H(t,\tau)W = 0
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\hat{x}(t) = \int_{t_0}^{t} H(t,\sigma) y(\sigma) d\sigma}
$$

# 4) Kalmanゲインの決定：誤差共分散による表現

$$E[\{x(t)-\hat{x}(t)\}x^T(\tau)]C^T(\tau)-H(t,\tau)W=0$$

$\tau \to t$ とすると

$$K(t)W=\underline{E[\{x(t)-\hat{x}(t)\}x^T(t)]}C^T(t)$$

$e(t)=x(t)-\hat{x}(t)$ の共分散を $P(t)=E[e(t)e^T(t)]$ とすれば,
$E[\{x(t)-\hat{x}(t)\}\hat{x}^T(t)]=0$ (直交原理) より

$$\begin{aligned}&\underline{E[\{x(t)-\hat{x}(t)\}x^T(t)]}\\ =\ &E[\{x(t)-\hat{x}(t)\}\{x^T(t)-\hat{x}^T(t)\}]=\underline{P(t)}\end{aligned}$$

$$\boxed{K(t)=P(t)C^T(t)W^{-1}}$$

# 5) 誤差共分散の更新式：方針

- 誤差e(t)の微分方程式を導出
- 誤差共分散行列P(t)の微分方程式を導出
- これを解いて更新式を導出

# 5) 誤差共分散の更新式：推定誤差の微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\hat{x}(t) + K(t)y(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e(t) =& [A(t) - K(t)C(t)]e(t) + K(t)C(t)x(t) \\ &+ B(t)v(t) - K(t)\{C(t)x(t) + w(t)\} \\ =& [A(t) - K(t)C(t)]e(t) + B(t)v(t) - K(t)w(t)\end{aligned}$$

e(t)の微分方程式

# （参考）行列微分方程式の解

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t)$$

初期条件 $x(t_0)$, 入力 $v(t)(t \geq t_0)$

解: $x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\Phi(t,\tau)}_{\text{遷移行列}} B(\tau)v(\tau)d\tau$

遷移行列は下記の微分方程式の基本解

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau)$$

$$\Phi(\tau,\tau) = I$$

# 5) 誤差共分散の更新式：推定誤差の導出

- $$\frac{d}{dt}e(t) = [A(t) - K(t)C(t)]e(t) + B(t)u(t) - K(t)w(t)$$

$\frac{d}{dt}\Phi_e(t,\tau) = [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t,\tau)$ の解を
遷移行列 $\Phi_e(t,\tau)$ とすると

$$\begin{aligned} e(t) =& \Phi_e(t,t_0)e(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^{t} \Phi_e(t,\tau)[B(\tau)u(\tau) - K(\tau)w(\tau)]d\tau \end{aligned}$$

# 5) 誤差共分散の更新式：誤差共分散の微分方程式

- $e(t_0)$ と $v(t),\ w(t)$ は無相関と仮定

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \mathbb{E}[e(t)e(t)^\mathsf{T}] \\
&= \Phi_e(t,t_0)P(t_0)\Phi_e^\mathsf{T}(t,t_0) \\
&\quad + \mathbb{E}\Big[\int_{t_0}^{t} \Phi_e(t,\tau)\{B(\tau)v(\tau) - K(\tau)w(\tau)\}\mathrm{d}\tau \\
&\qquad \int_{t_0}^{t} \{v^\mathsf{T}(\sigma)B^\mathsf{T}(\sigma) - w^\mathsf{T}(\sigma)K^\mathsf{T}(\sigma)\}\Phi_e^\mathsf{T}(t,\sigma)\mathrm{d}\sigma\Big]
\end{aligned}
$$

- $v(t)$ と $w(t)$ は互いに無相関なので

$$
\begin{aligned}
P(t) &= \Phi_e(t,t_0)P(t_0)\Phi_e^\mathsf{T}(t,t_0) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \Phi_e(t,\tau)\Big[B(\tau)VB^\mathsf{T}(\tau) + K(\tau)WK^\mathsf{T}(\tau)\Big]\Phi_e^\mathsf{T}(t,\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

# 5) 誤差共分散の更新式：誤差共分散の微分方程式

- 両辺をtで微分

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P(t) = & \underline{\frac{d}{dt}\Phi_e(t,t_0)P(t_0)\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,t_0)} \\
& \underline{+\Phi_e(t,t_0)P(t_0)\frac{d}{dt}\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,t_0)} \\
& \underline{+\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\Phi_e(t,\tau)D(\tau)\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,\tau)d\tau} \\
& \underline{+\int_{t_0}^{t}\Phi_e(t,\tau)D(\tau)\frac{d}{dt}\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,\tau)d\tau} \\
& \underline{+\Phi_e(t,t)D(t)\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,t)}
\end{aligned}
$$

Leibniz' Rule の適用

$$D(\tau) = B(\tau)VB^{\mathsf{T}}(\tau) + K(\tau)WK^{\mathsf{T}}(\tau)$$

# 5) 誤差共分散の更新式：誤差共分散の微分方程式

- $\dfrac{d}{dt}\Phi_e(t,\tau) = [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t,\tau)$ を代入

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P(t) = {} & [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t,t_0)P(t_0)\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,t_0) \\
& + \Phi_e(t,t_0)P(t_0)\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,t_0)[A(t) - K(t)C(t)]^{\mathsf{T}} \\
& + \int_{t_0}^{t} [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t,\tau)D(\tau)\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,\tau)d\tau \\
& + \int_{t_0}^{t} \Phi_e(t,\tau)D(\tau)\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,\tau)[A(t) - K(t)C(t)]^{\mathsf{T}}d\tau \\
& + D(t)
\end{aligned}
$$

$$
D(\tau) = B(\tau)VB^{\mathsf{T}}(\tau) + K(\tau)WK^{\mathsf{T}}(\tau)
$$

# 5) 誤差共分散の更新式：誤差共分散の微分方程式

$$\boxed{P(t) = \Phi_e(t,t_0)P(t_0)\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi_e(t,\tau)D(\tau)\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,\tau)\mathrm{d}\tau}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P(t) = &\ \underline{[A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t,t_0)P(t_0)\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,t_0)} \\
&+ \underline{\Phi_e(t,t_0)P(t_0)\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,t_0)[A(t) - K(t)C(t)]^{\mathsf{T}}} \\
&+ \underline{\int_{t_0}^{t} [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t,\tau)D(\tau)\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,\tau)d\tau} \\
&+ \underline{\int_{t_0}^{t} \Phi_e(t,\tau)D(\tau)\Phi_e^{\mathsf{T}}(t,\tau)[A(t) - K(t)C(t)]^{\mathsf{T}}d\tau} \\
&+ D(t) \\
= &\ \underline{[A(t) - K(t)C(t)]P(t)} + \underline{P(t)[A(t) - K(t)C(t)]^{\mathsf{T}}} + D(t)
\end{aligned}$$

# 5) 誤差共分散の更新式：誤差共分散の微分方程式

- 先に求めたKalmanゲインを代入

$$\boxed{K(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}}$$

$$\frac{d}{dt}P(t) = A(t)P(t) - P(t)C^{\mathsf{T}}(t)W^{-1}C(t)P(t) + P(t)A^{\mathsf{T}}(t) + B(t)VB(t)^{\mathsf{T}}$$

この微分方程式を
Riccati方程式という

# Kalmanゲインと誤差共分散

Kalmanゲイン

$$K(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}$$

Riccati方程式

$$\frac{d}{dt}P(t) = A(t)P(t) - P(t)C^{\mathsf{T}}(t)W^{-1}C(t)P(t) + P(t)A^{\mathsf{T}}(t) + B(t)VB(t)^{\mathsf{T}}$$

$$P(t_0) = X_0$$