

# 信号処理論第二 第5回 (11/8)

情報理工学系研究科システム情報学専攻

亀岡 弘和

[kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp](mailto:kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp)

# 講義予定

- 10/04: 第1回
- 10/11: 第2回
- 10/18: 第3回
- 10/25: 第4回
- 11/01: 休講
- 11/08: 第5回
- 11/15: 第6回
- 11/22: 休講
- 11/29: 第7回
- 12/08: 第8回
- 12/13: 第9回
- 12/20: 第10回
- 01/10: 第11回
- 01/17: 第12回
- 01/24: 第13回
- 01/31: 期末試験

# 講義内容

- $\delta$ 関数再考
- $\delta$ 関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

# 講義資料と成績評価

- 講義資料

- <http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/sp2/>

- 成績評価

- 出席点

- 学期末試験

# 前回の復習

## ■ 補足事項: ガウス積分

- $\int_0^{\infty} e^{-(x+jb)^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  の証明

## ■ サンプリング定理

- エイリアシングがおきない条件:  $\omega_0 \geq 2\omega_c$

$\omega_0$ : サンプリング周波数

$\omega_c$ : 対象とする信号の最大周波数 ( $F(\omega) = 0$  ( $|\omega| > \omega_c$ ))

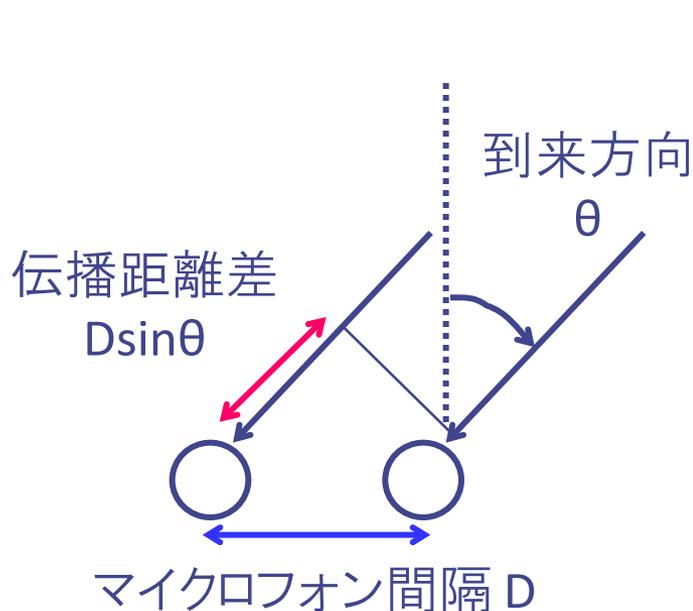
- 離散から連続の復元公式:  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\sin \omega_0(t - nT)}{\omega_0(t - nT)}$

## ■ 不規則信号の導入

- 確率密度関数
- 集合平均、自己／相互相関、自己／相互共分散
- 強定常、弱定常、時間平均、エルゴード性

# 相互相関関数の応用例 (1/2)

- 2つのマイクロフォンにある方向から音波が到来している。音波の到来方向を知りたい。
- 伝播時間差がわかれば方向がわかるが、どんな音波が到来してくるかわからない。



雑音

$$f_1(t) = x(t - \tau_0) + n_1(t)$$

$$f_2(t) = x(t) + n_2(t)$$

$$\tau_0 = D \sin \theta / c$$

相互相関関数のピークを求めればよい

# 相互相関関数の応用例 (2/2)

## ■ 相互相関:

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \mathbb{E}[f_1(t + \tau)f_2(t)] \\ &= \mathbb{E}[\{x(t - \tau_0 + \tau) + n_1(t + \tau)\}\{x(t) + n_2(t)\}] \\ &= \mathbb{E}[x(t - \tau_0 + \tau)x(t)] + \mathbb{E}[x(t - \tau_0 + \tau)n_2(t)] \\ &\quad + \mathbb{E}[n_1(t + \tau)x(t)] + \mathbb{E}[n_1(t + \tau)n_2(t)] \\ &= \underline{R_{xx}(\tau - \tau_0)} \qquad \text{無相関なら0} \end{aligned}$$

$\tau = \tau_0$ でピーク

## ■ 自己相関:

$$\begin{aligned} R_{11}(\tau) &= E[f_1(t + \tau)f_1(t)] \\ &= \underline{R_{xx}(\tau) + R_{n_1n_1}(\tau)} \\ &\qquad \tau = 0 \text{でピーク} \end{aligned}$$

- 雑音が0ならピーク値は等しい
- ピーク値の比でSN比がわかる

# 信号のエネルギーとエネルギースペクトル

## ■ Parsevalの定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

## ■ 左辺は信号の全エネルギー

## ■ 右辺の $\Phi(\omega) = |X(\omega)|^2 / 2\pi$

- エネルギースペクトル (energy spectrum)
- 単位角周波数あたりのエネルギーを表わす
- エネルギーが有限な信号  $x(t)$  に対して意味をもつ

# 定常不規則信号とパワースペクトル

- 定常な不規則信号は無限のエネルギーをもつ  
→ エネルギースペクトルを考えることができない
- そこで信号の単位時間あたりのエネルギー  
(パワー)を考え、**パワースペクトル(power spectrum)**を定義する

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T \leq t \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

$$\Phi_T(\omega) = \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} \quad X_T(\omega) \text{ は } x_T(t) \text{ の Fourier 変換}$$

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E[\Phi_T(\omega)]$$

# ウィーナーヒンチンの定理 (1/1)

- $\Phi_T(\omega)$  は標本信号  $x(t)$  毎に求まるので  
その集合平均（期待値）を考える

$$\begin{aligned} E[\Phi_T(\omega)] &= E \left[ \frac{1}{2T} |X_T(\omega)|^2 \right] \\ &= E \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \int_{-T}^T x(t_2)^* e^{j\omega t_2} dt_2 \right] \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[x(t_1)x(t_2)^*] e^{-j\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R(t_1 - t_2) e^{-j\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

# ウィーナーヒンチンの定理 (2/2)

$\tau = t_1 - t_2$ ,  $\lambda = t_1$  とすれば

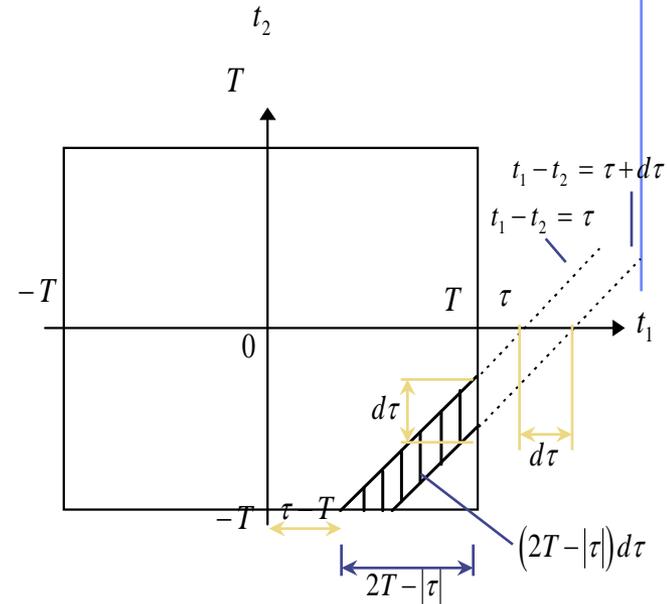
$$E[\Phi_T(\omega)] = \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|) R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-2T}^{2T} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau - \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} |\tau| R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau R(\tau)| d\tau < \infty$  ならば

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[\Phi_T(\omega)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-2T}^{2T} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$



パワースペクトルは  
自己相関関数の  
Fourier変換

# パワースペクトルの実数値性

一般に  $x(t)$  が複素数であり

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t + \tau)x^*(t)]$$

のとき、 $R(-\tau) = R^*(\tau)$  であるから、 $S(\omega)$  は実関数

$$\begin{aligned} S^*(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R^*(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(-\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= S(\omega) \end{aligned}$$

# パワースペクトルの非負値性

- $\tau = 0$  とすれば

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = R(0) = \mathbb{E}[|x(t)|^2] \geq 0$$

- よって  $S(\omega) \geq 0$

- もし  $S(\omega) < 0$  となる  $\omega$  があればそこだけを切り出すフィルタにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) d\omega < 0$$

となるようなパワースペクトル  $\tilde{S}(\omega)$  が作れてしまい、上記の性質に反する

# クロススペクトル (cross spectrum)

- 定常確率過程のクロススペクトル密度：  
相互相関関数のFourier変換

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= S_{yx}^*(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E[x(t + \tau)y^*(t)] \\ R_{xy}(\tau) &= R_{yx}^*(-\tau) \end{aligned}$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

# 窓関数

- ある有限区間以外で0となる, 通常正值をとる関数

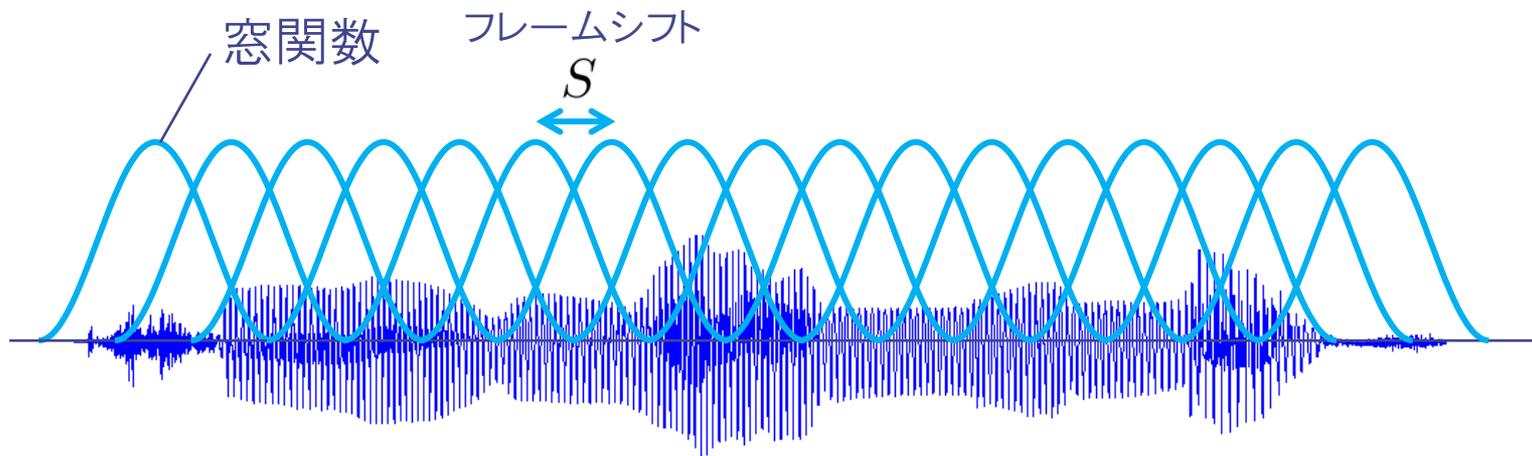
$$\text{data window } B(t) \begin{cases} > 0 & (-T \leq t \leq T) \\ = 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

- 信号を有限区間切り出し, 分析するのに用いられる
  - 非定常な信号の場合でも、短い時間区間では定常とみなせる場合が多い

$$\hat{x}(t) = x(t)B(t)$$

# 参考：短時間Fourier変換（窓関数の応用）

- 文字通り，信号を短時間ごとに窓掛けして，Fourier変換する処理



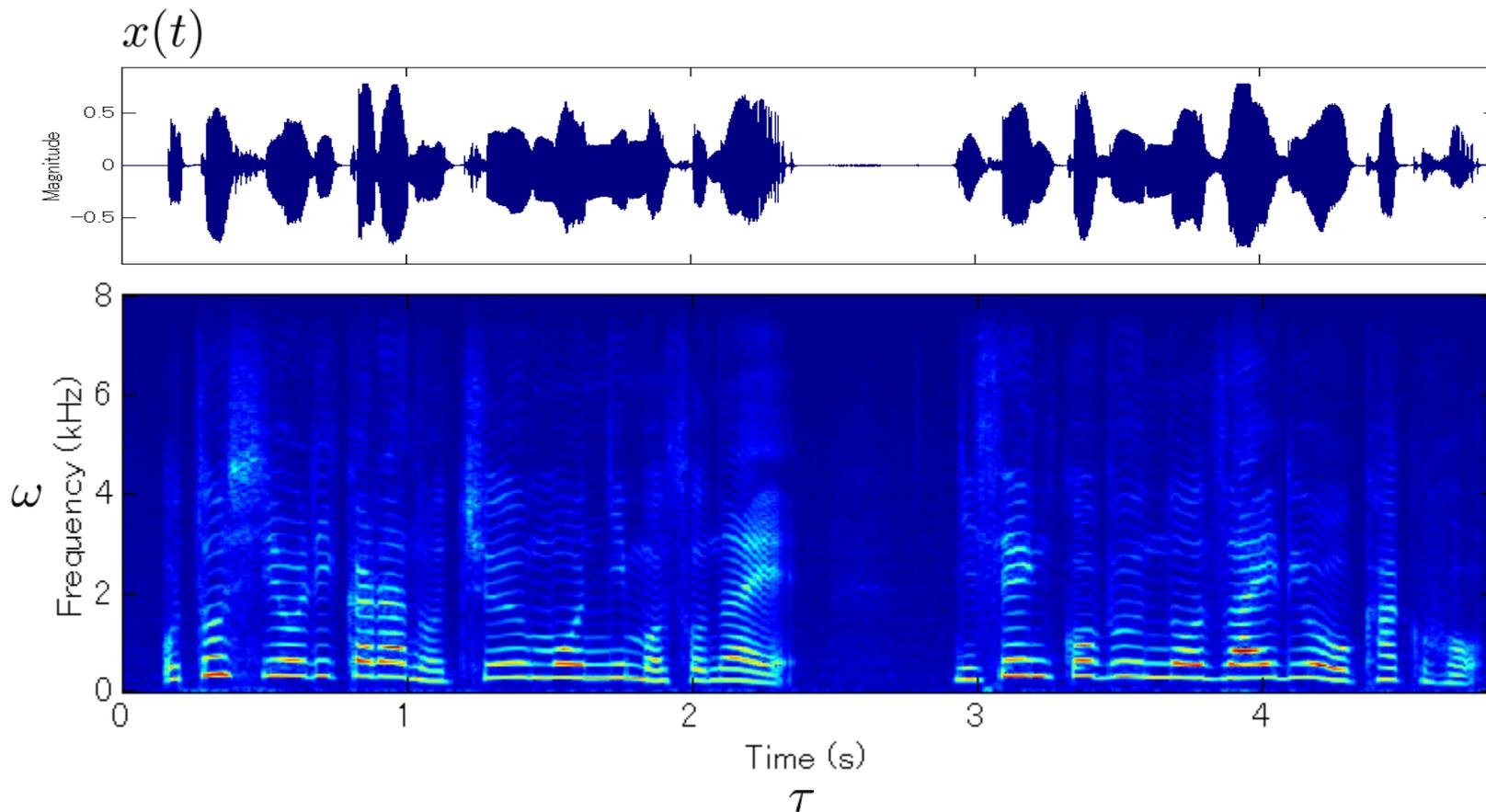
- 式で書くと・・・

$$X_{\text{STFT}}(\omega, mS) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{w(t)x(t + mS)} e^{-j\omega t} dt$$

$m$  番目の窓で  
切り出された波形

# 参考: スペクトログラム

- $|X_{\text{STFT}}(\omega, \tau)|$  をカラーマップ表示してみる



# 窓関数の効果1

- 窓関数をかけることによる自己相関関数の変化:

$$\phi_T(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)B(t)x(t+\tau)B(t+\tau)dt$$

$$E[\phi_T(\tau)] = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t)x(t+\tau)]B(t)B(t+\tau)dt$$

$$= R(\tau) \cdot \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} B(t)B(t+\tau)dt$$

$$= R(\tau) \underline{D(\tau)}$$

lag window

- lag windowが乗じられる

## 窓関数の効果2

- 窓関数をかけることによるパワースペクトルの変化:

$$E[\phi_T(\tau)] = R(\tau)D(\tau)$$

 Fourier変換

$$E[\Phi_T(\omega)] = \frac{1}{2\pi} S(\omega) * Q(\omega)$$

$$\underline{Q(\omega)} = F[D(\tau)]$$

spectral window

- spectral windowが畳み込まれる

# 各ドメインでの窓関数の関係

data window

$$B(t)$$

(時間領域)

Fourier変換

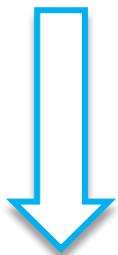


frequency window

$$J(\omega) = F[B(t)]$$

(周波数領域)

自己相関



lag window

$$D(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} B(t)B(t + \tau)dt$$

(自己相関領域)

Fourier変換



spectral window

$$Q(\omega) = F[D(\tau)] = \frac{1}{2\pi} |J(\omega)|^2$$

(パワースペクトル領域)

絶対値二乗



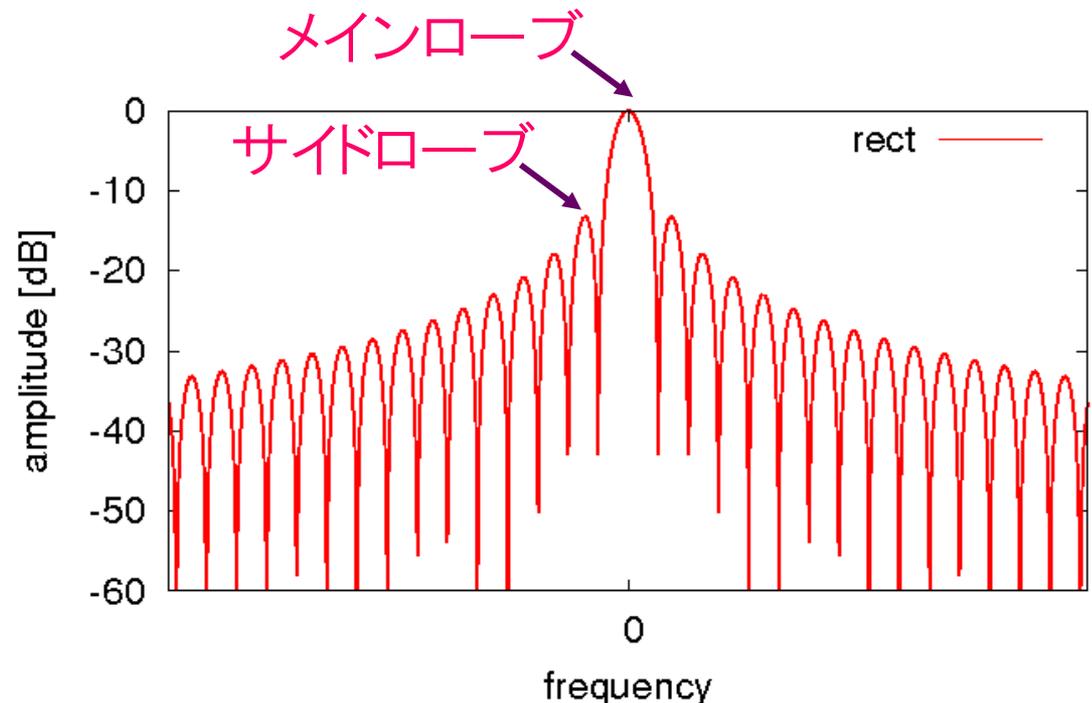
# 様々な窓関数

## ■ 窓関数の重要な特性

- メインローブの幅(周波数分解能):狭いほどよい
- サイドローブの大きさ(ダイナミックレンジ):小さいほどよい

## ■ 代表的な窓関数

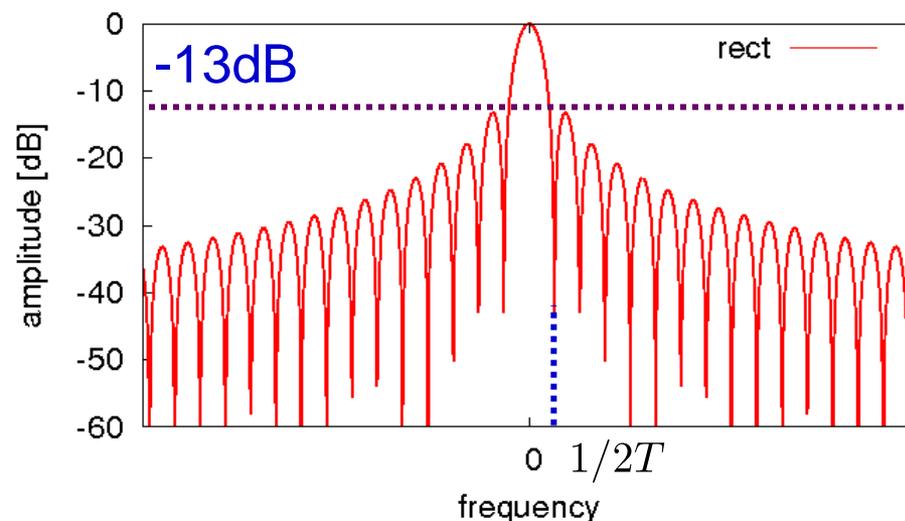
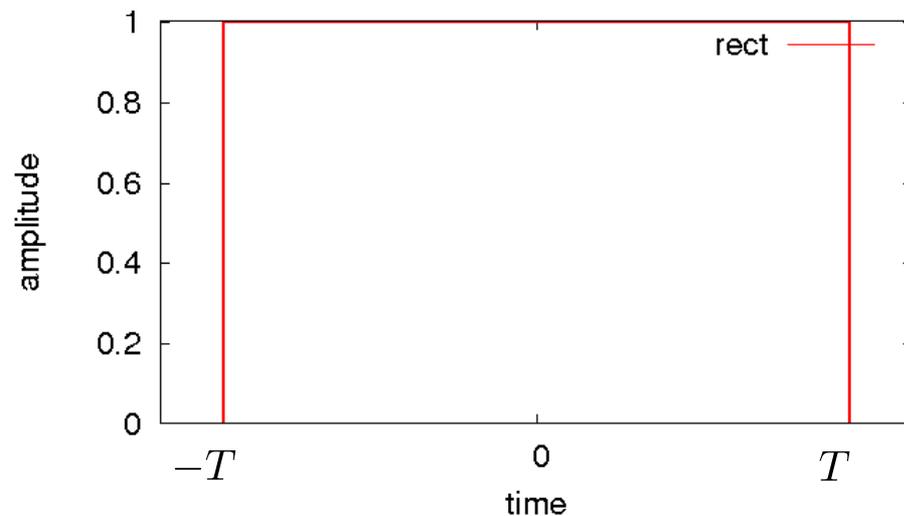
- 矩形窓
- 三角窓(Bartlett窓)
- Hanning窓
- Hamming窓
- Blackmann窓



# 矩形窓

$$B(t) = \begin{cases} 1 & (|t| < T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

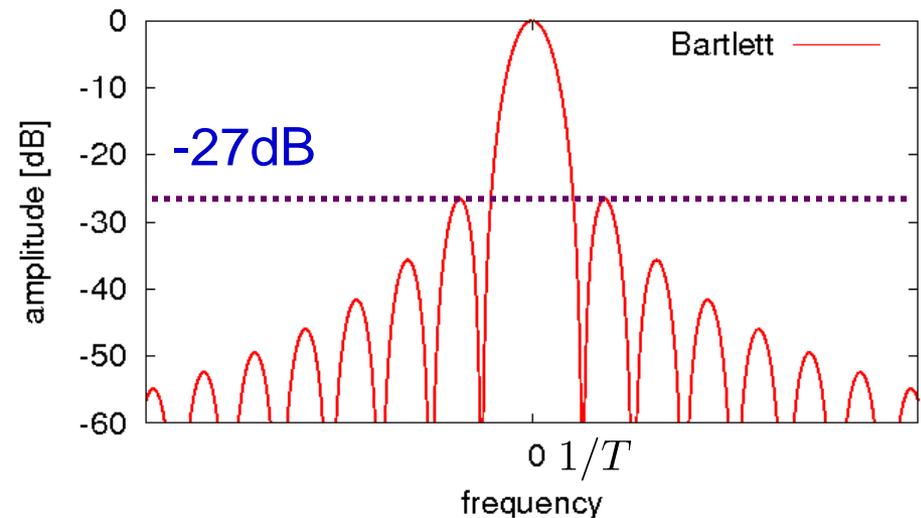
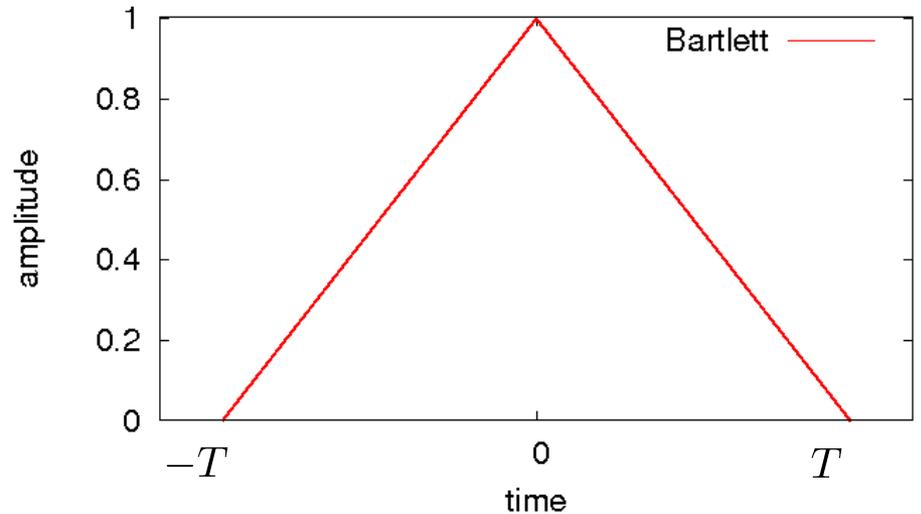
- 方形窓、Dirichlet窓とも呼ばれる
- メインローブの幅は窓関数中最も狭い
- サイドローブの最大値は-13dBと大きい



# 三角窓

$$B(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & (|t| < T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

- Bartlett窓とも呼ばれる
- 矩形窓の自己相関で表される
- サイドローブの最大値：  
-27dB

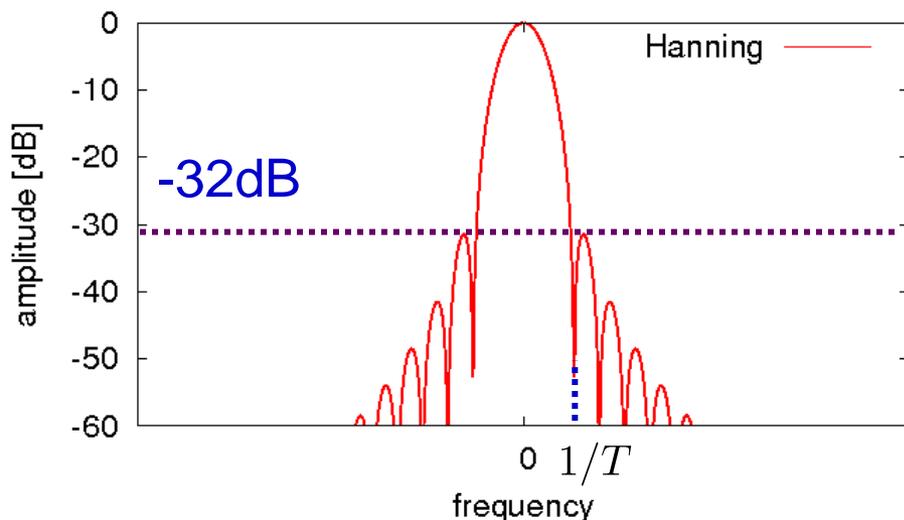
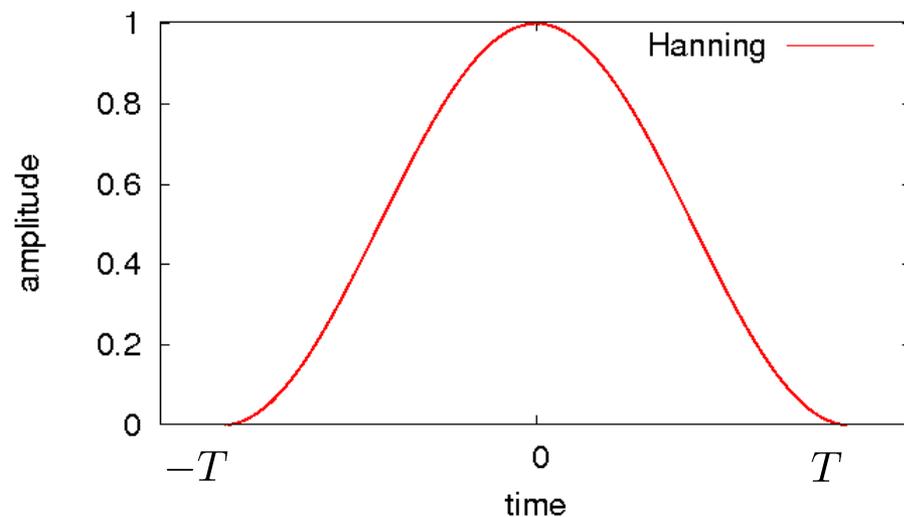


# Hanning窓

$B(t)$

$$= \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) & (|t| < T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

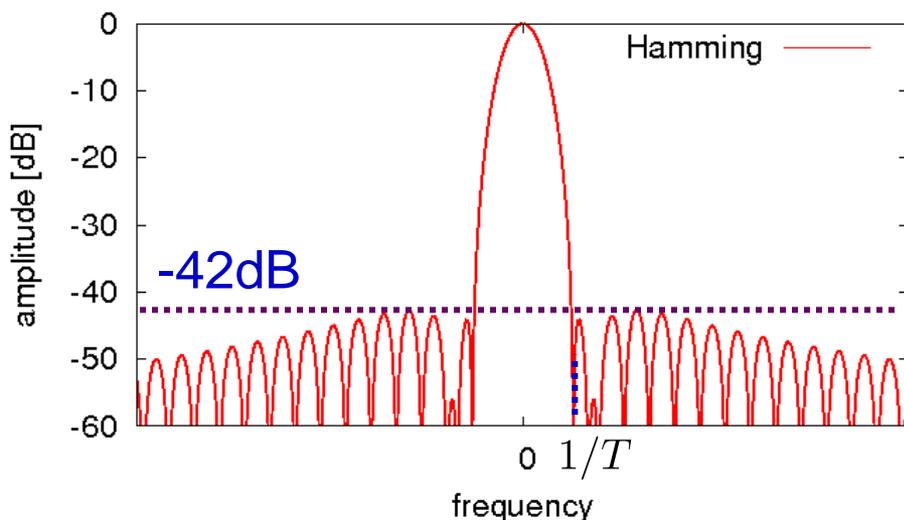
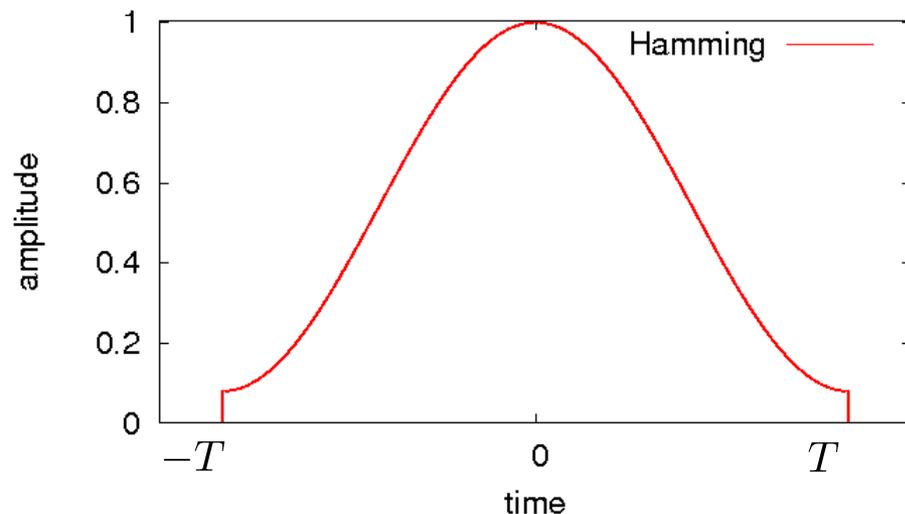
- J. von. Hanにより提案
- サイドローブの最大値：  
-32dB
- メインローブの幅は  
三角窓より大きい



# Hamming窓

$$B(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) & (|t| < T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

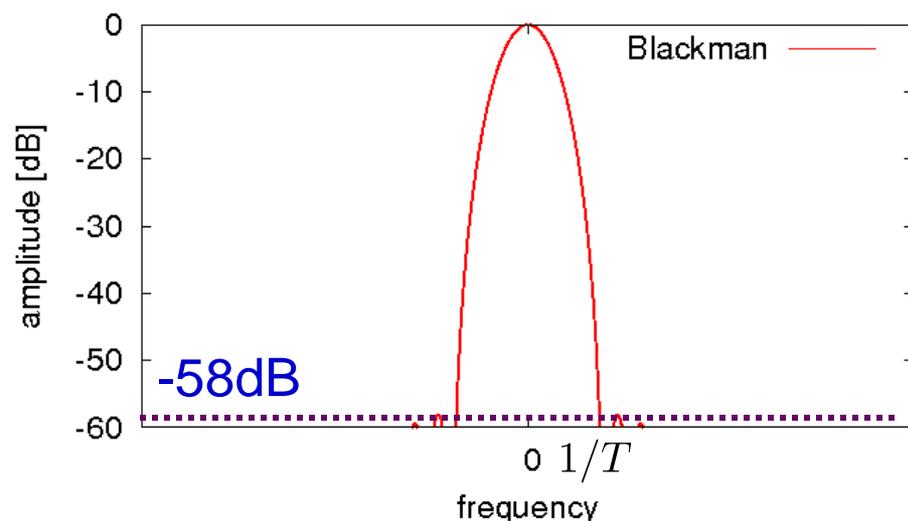
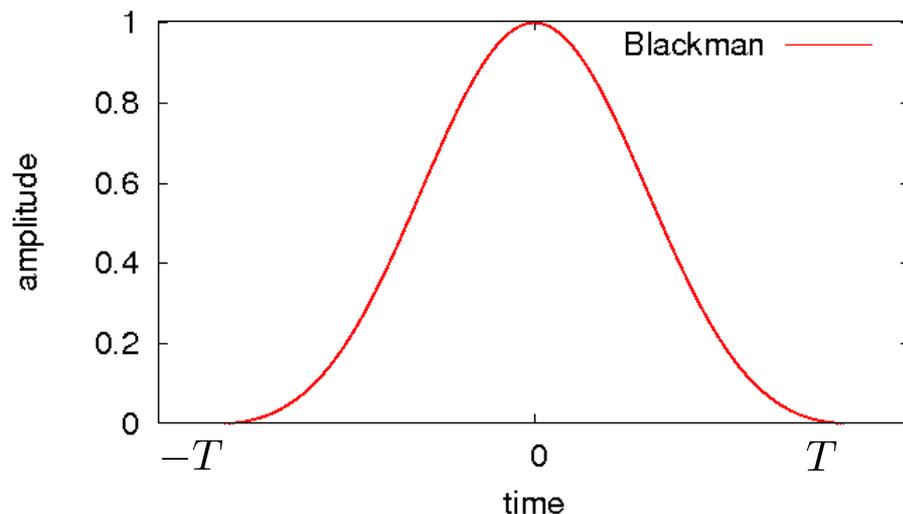
- R. W. Hammingにより提案
- 両端で0にならない窓関数
- サイドローブの最大値：  
-42dB
- ただしサイドローブの減衰は  
Hanning窓に比べ緩やか



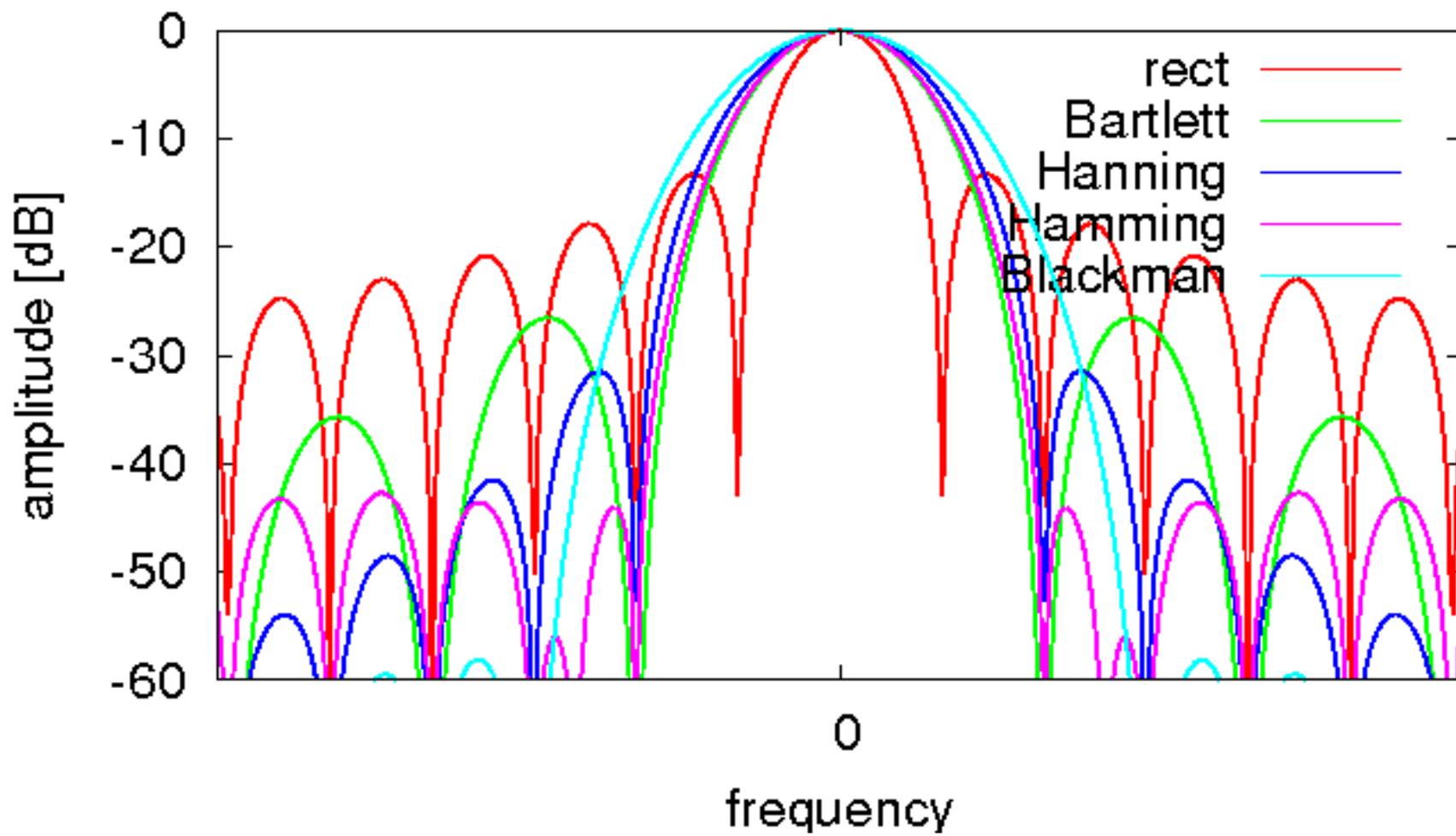
# Blackman窓

$$B(t) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \\ \quad + 0.08 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & (|t| < T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

- R. Blackmanにより提案
- サイドローブの最大値:  
-58dB
- ただしメインローブの幅は  
比較的大きい



# 窓関数同士の比較



# 有限長観測からのパワースペクトルの推定

- 窓関数による信号の切り出し

$$\hat{x}(t) = x(t)B(t)$$

- 自己相関関数の計算(場合によっては+標本平均)

$$\phi_T(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)B(t)x(t+\tau)B(t+\tau)dt$$

- Fourier変換

$$\Phi_T(\omega) = \mathbf{F}[\phi_T(t)]$$