

# 信号処理論第二 第3回 (10/18)

情報理工学系研究科システム情報学専攻

亀岡 弘和

[kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp](mailto:kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp)

# 講義予定

- 10/04: 第1回
- 10/11: 第2回
- 10/18: 第3回
- 10/25: 第4回
- 11/01: 休講
- 11/08: 第5回
- 11/15: 第6回
- 11/22: 休講
- 11/29: 第7回
- 12/08: 第8回
- 12/13: 第9回
- 12/20: 第10回
- 01/10: 第11回
- 01/17: 第12回
- 01/24: 第13回
- 01/31: 期末試験

# 講義内容

- $\delta$ 関数再考
- $\delta$ 関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

# 講義資料と成績評価

- 講義資料

- <http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/sp2/>

- 成績評価

- 出席点

- 学期末試験

# 前回の復習

## ■ $\delta$ 関数の正しい定義

- 例) 
$$\delta(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t}$$

## ■ 実関数のFourier変換の性質

- 実関数  $f(t)$  の Fourier 変換  $F(\omega)$  は  $F(-\omega) = F^*(\omega)$  を満たす
- すなわち、 $F(\omega)$  の実部は偶関数、 $F(\omega)$  の虚部は奇関数
- 逆に  $f(t)$  が偶関数ならば、 $F(\omega)$  は実部のみ（虚部 0）  
 $f(t)$  が奇関数ならば、 $F(\omega)$  は虚部のみ（実部 0）

## ■ 重畳積分定理

## ■ Parsevalの定理

## ■ $\delta$ 関数や不連続関数を含むFourier変換

# 符号関数のFourier変換

$$\blacksquare f(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases}$$

- 奇関数より  $R(\omega) = 0$

$$I(\omega) = -2 \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$$= -2 \int_0^{\infty} \sin \omega t dt$$

$$= \frac{-2}{\omega}$$

$$F(\omega) = jI(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

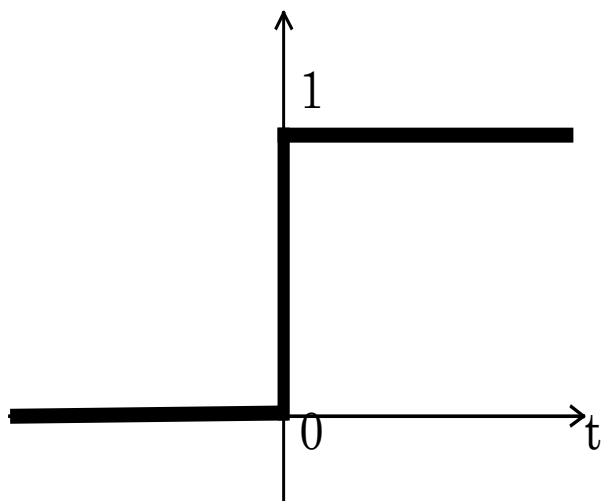
$$\because \int_0^{\infty} \sin \omega t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \sin \omega t dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \omega T}{\omega}$$

$$= \frac{1}{\omega}$$

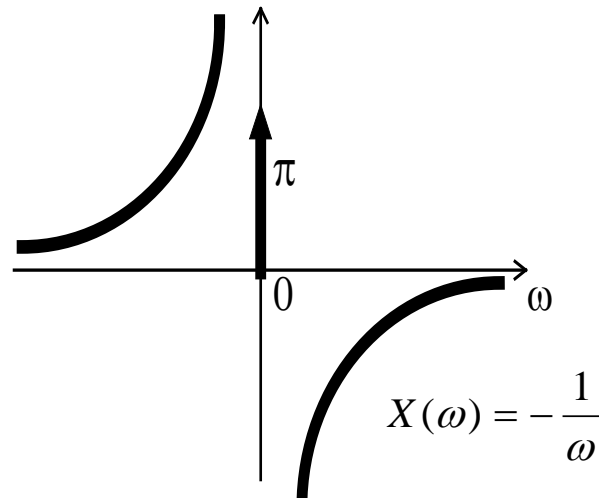
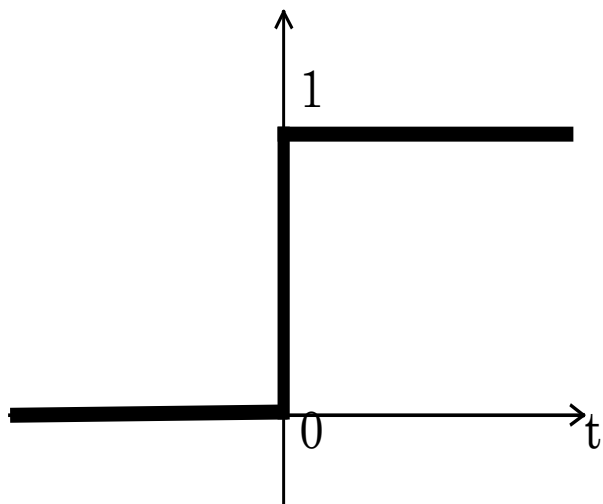
# ステップ関数のFourier変換

■  $f(t) = U(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 1/2 & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$



# ステップ関数のFourier変換

$$\blacksquare f(t) = U(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 1/2 & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$



$$U(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\therefore U(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$$



# $\delta$ 関数の高階微分のFourier変換

- $f(t) = \frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$

# δ関数の高階微分のFourier変換

- $f(t) = \frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$

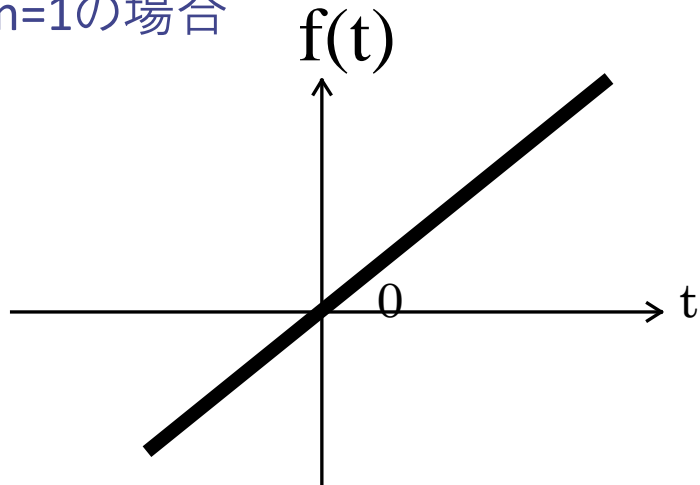
$$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n$$

$$\begin{aligned} \therefore F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} e^{-j\omega t} dt \\ &= (-1)^n \left. \frac{d^n e^{-j\omega t}}{dt^n} \right|_{t=0} \\ &= (j\omega)^n \end{aligned}$$

# べき乗関数のFourier変換

■  $f(t) = t^n$

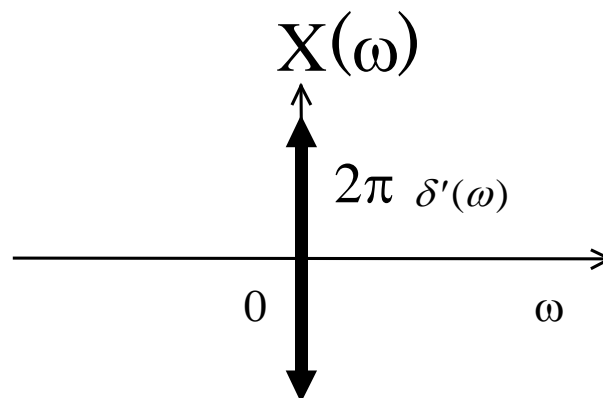
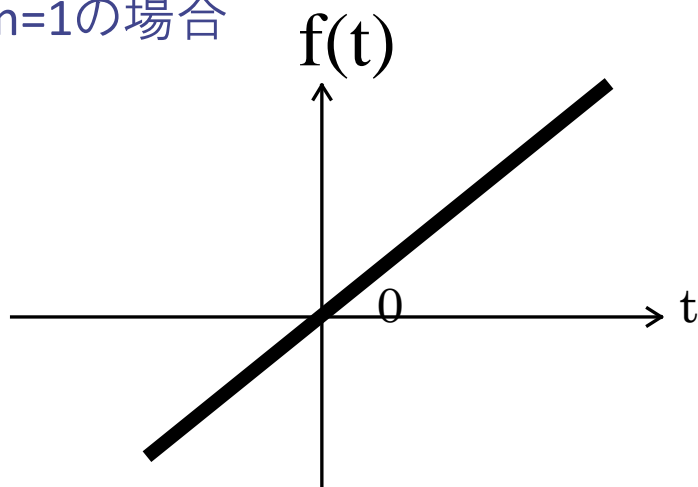
n=1の場合



# べき乗関数のFourier変換

■  $f(t) = t^n$

n=1の場合



$$t^n \leftrightarrow 2\pi j^n \frac{d^n \delta(\omega)}{d\omega^n}$$

# べき乗関数のFourier変換の証明

$$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n$$

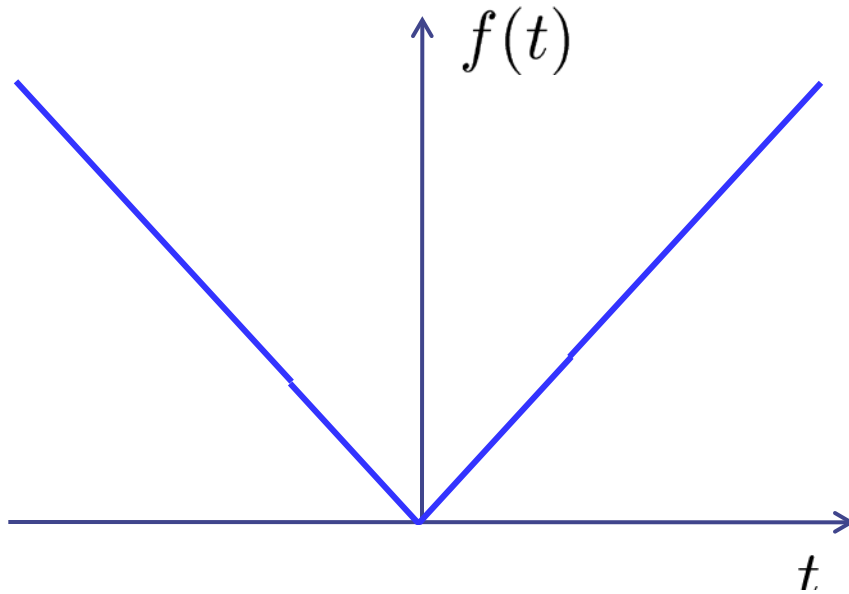
$$(-j)^n \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \leftrightarrow \omega^n$$

$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$  を用いれば

$$t^n \leftrightarrow 2\pi j^n \frac{d^n \delta(\omega)}{d\omega^n}$$

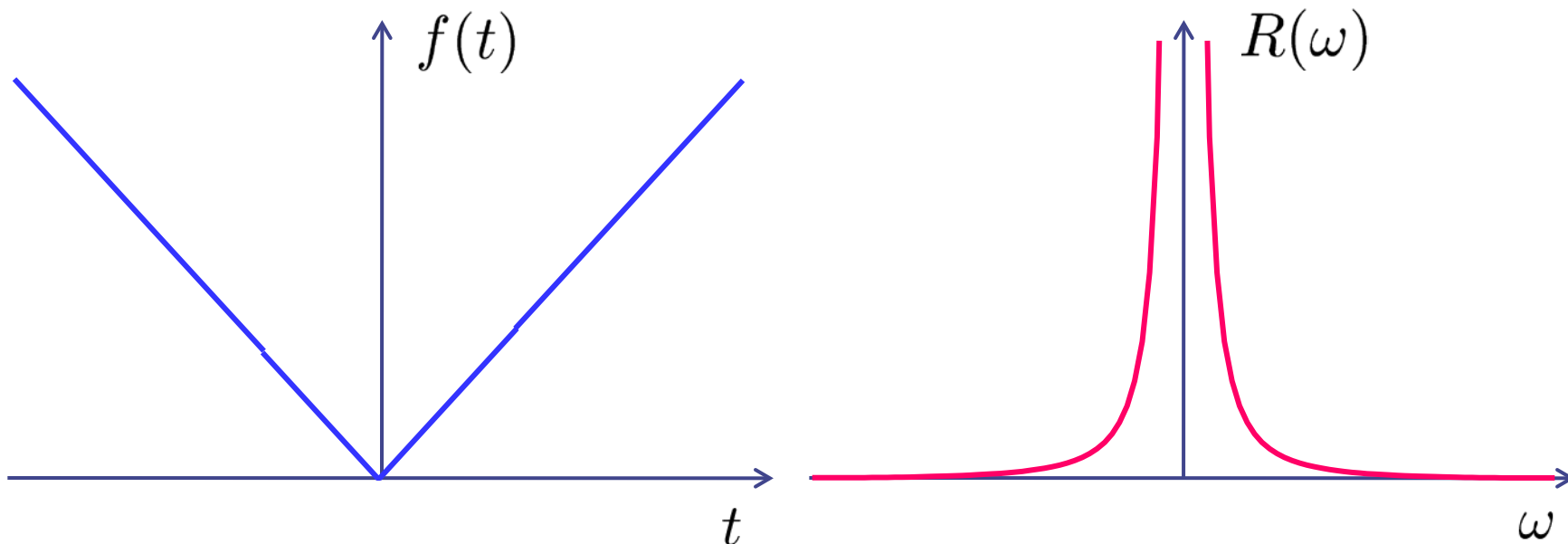
# 絶対値関数のFourier変換

■  $f(t) = |t|$



# 絶対値関数のFourier変換

■  $f(t) = |t|$



$$|t| \leftrightarrow -\frac{2}{\omega^2}$$

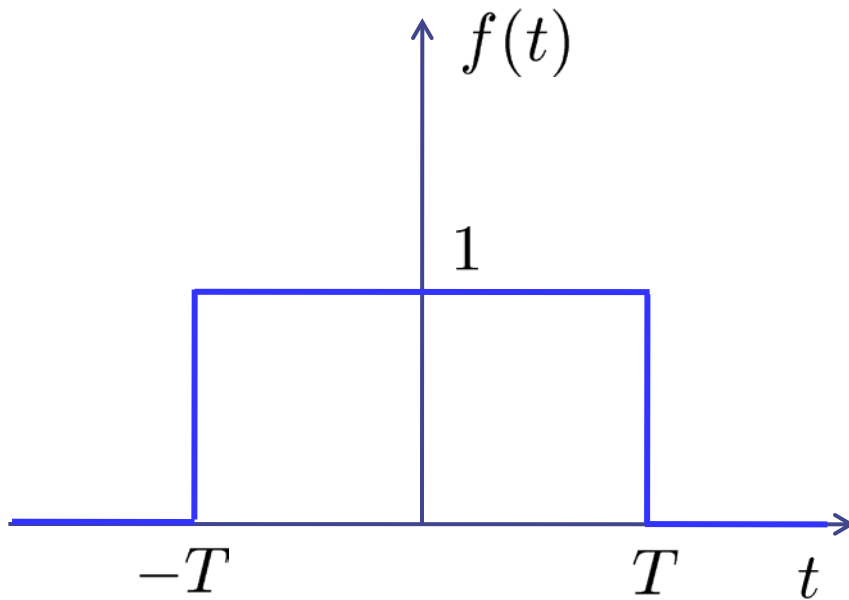
# 絶対値関数のFourier変換の証明

$$\begin{aligned}\because \mathcal{F}[t \cdot \text{sgnt}] &= \frac{1}{2\pi} \left( 2\pi j \frac{d\delta(\omega)}{d\omega} \right) * \left( \frac{2}{j\omega} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta(y)}{dy} \cdot \frac{2}{\omega - y} dy \\ &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \cdot \frac{(-1)(-1)}{(\omega - y)^2} dy \\ &= -\frac{2}{\omega^2}\end{aligned}$$



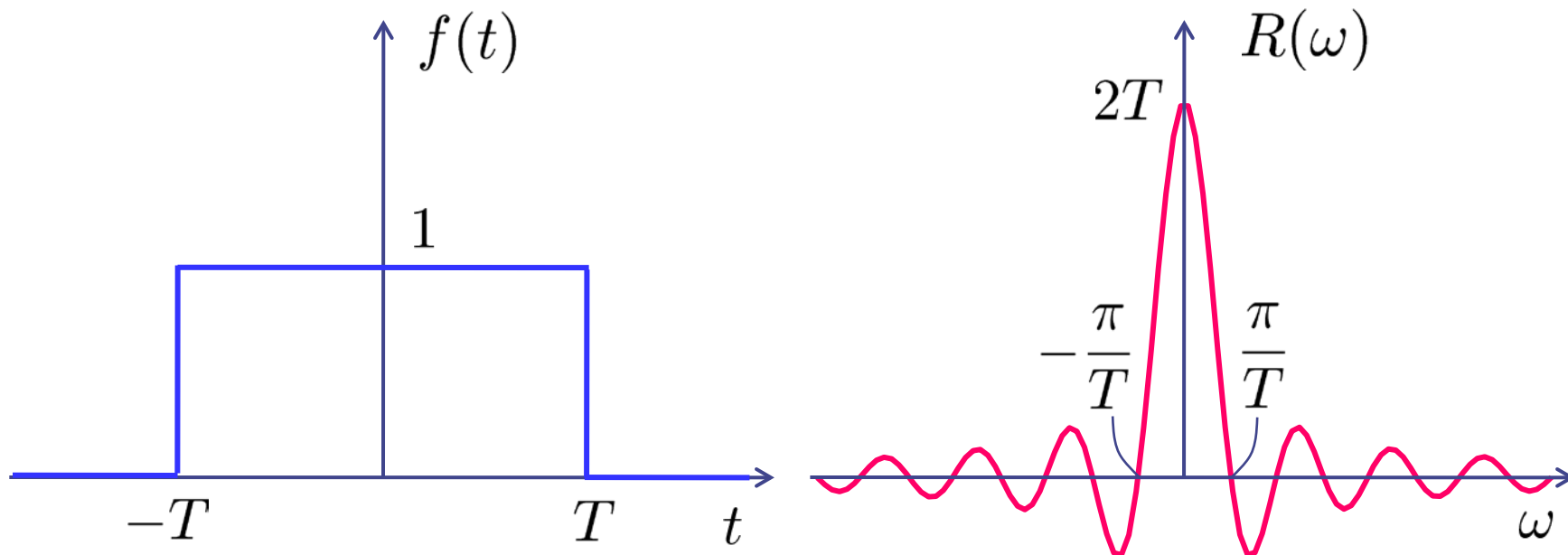
# 矩形関数のFourier変換

■  $f(t) = P_T(t)$



# 矩形関数のFourier変換

■  $f(t) = P_T(t)$



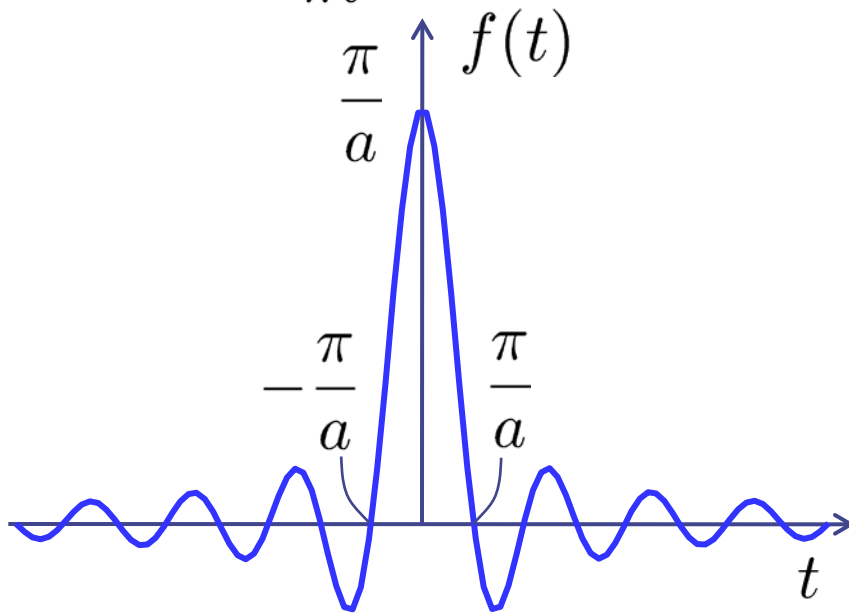
$$P_T(t) \leftrightarrow \frac{2 \sin \omega T}{\omega}$$

# 矩形関数のFourier変換の証明

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-\infty}^{\infty} P_T(t) e^{-j\omega t} dt &= \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}) \\ &= \frac{2 \sin \omega T}{\omega}\end{aligned}$$

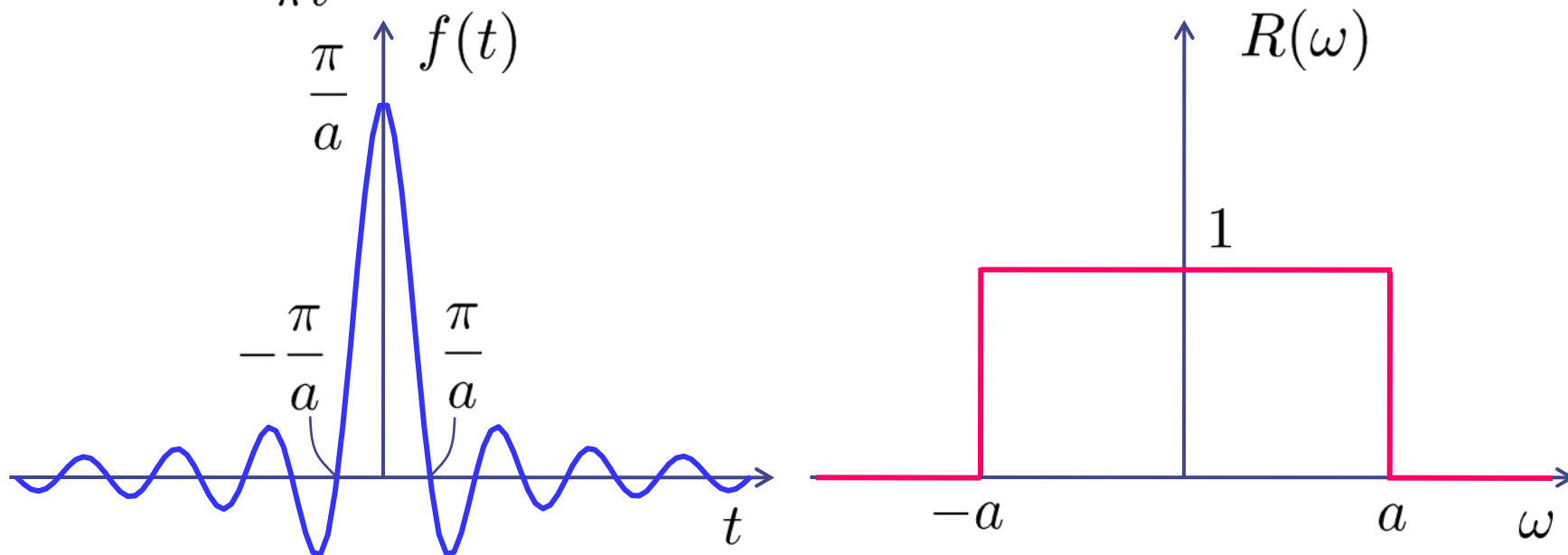
# sinc関数のFourier変換

■  $f(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$



# sinc関数のFourier変換

■  $f(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$

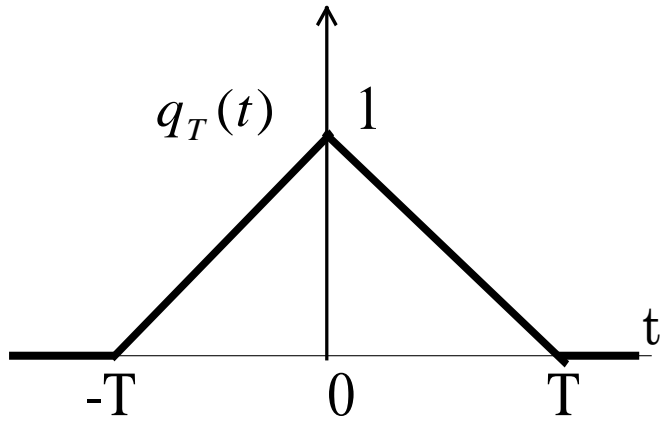


$$\frac{\sin at}{\pi t} \leftrightarrow P_a(\omega)$$

$$\therefore F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \text{ より } \frac{1}{2\pi} \frac{2 \sin at}{t} \leftrightarrow P_a(-\omega)$$

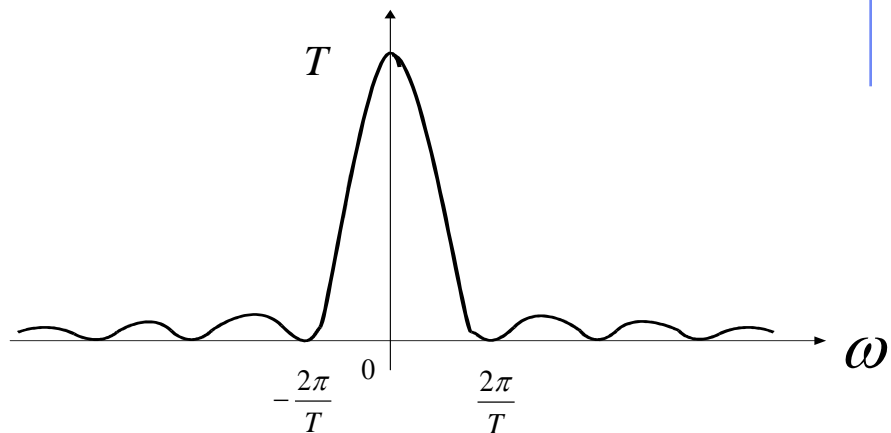
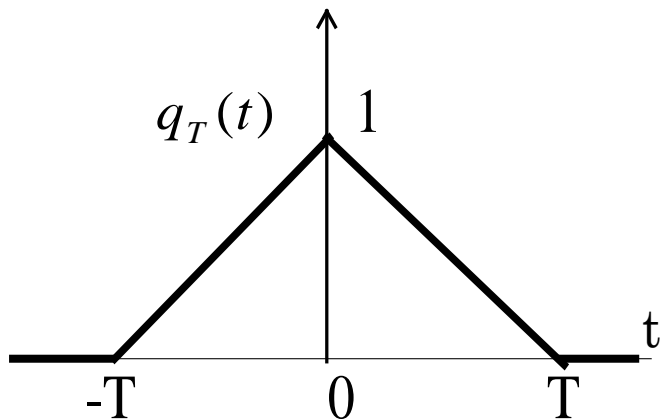
# 三角窓(bartlett窓)のFourier変換

■  $f(t) = q_T(t)$



# 三角窓(bartlett窓)のFourier変換

■  $f(t) = q_T(t)$



$$q_T(t) \leftrightarrow \frac{4 \sin^2 \left( \frac{\omega T}{2} \right)}{T \omega^2}$$

# 三角窓(bartlett窓)のFourier変換の証明1

$$q_T(t) = \frac{1}{T} P_{T/2}(t) * P_{T/2}(t)$$

$P_{T/2}(t) * P_{T/2}(t) = Tq_T(t)$ を示す。

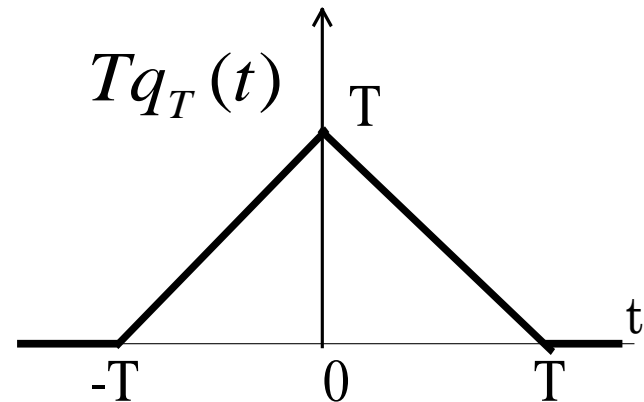
$$\therefore P_{T/2}(t) * P_{T/2}(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_{T/2}(\tau) P_{T/2}(t - \tau) d\tau$$

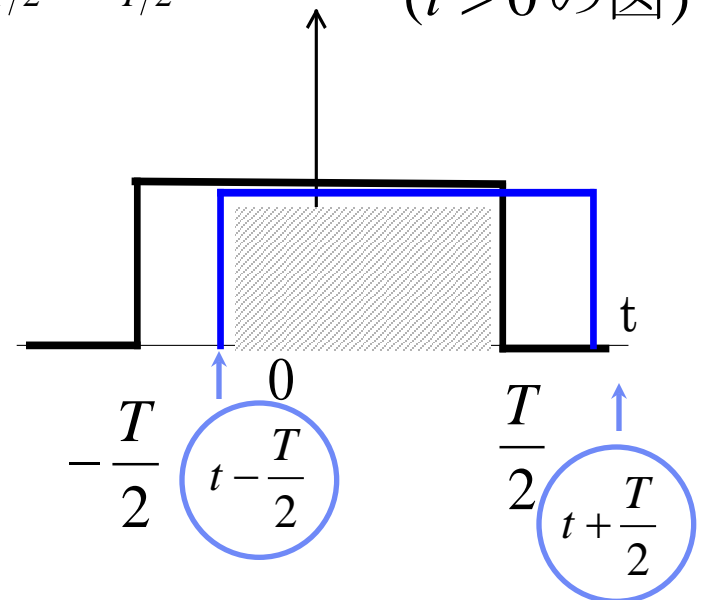
$$= \int_{-T/2}^{T/2} P_{T/2}(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{t-T/2}^{t+T/2} P_{T/2}(\tau') d\tau'$$

$$= \begin{cases} T - t & (0 < t < T) \\ T + t & (-T < t \leq 0) \\ 0 & (t \leq -T, t \geq T) \end{cases}$$



$P_{T/2} * P_{T/2}$  ( $t > 0$  の図)





# 三角窓(bartlett窓)のFourier変換の証明2

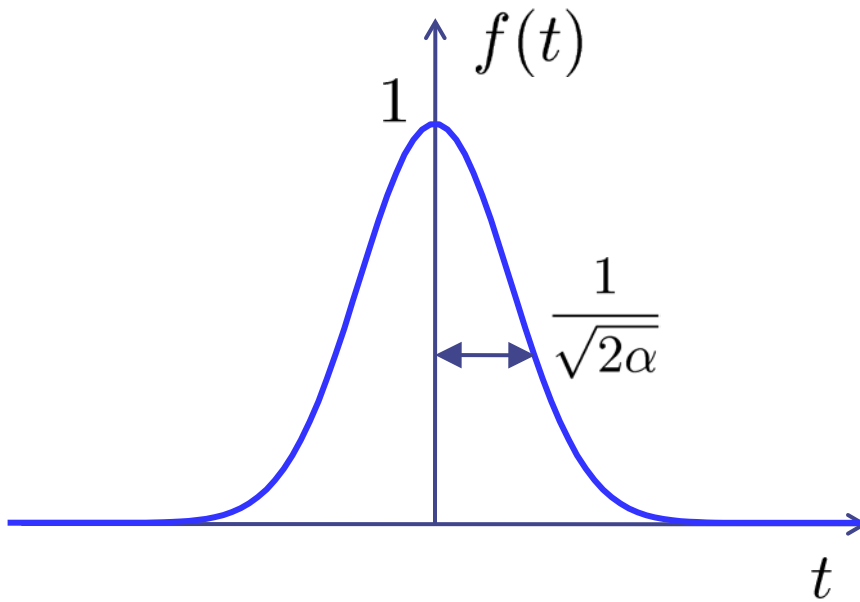
$$F(q_T) = \frac{1}{T} F(P_{T/2} * P_{T/2}) \quad \left( \because q_T = \frac{1}{T} P_{T/2} * P_{T/2} \right)$$

$$= \frac{1}{T} \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} \cdot \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} \quad \left( \because P_{T/2}(t) \leftrightarrow \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} \right)$$

$$= \frac{4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{T\omega^2}$$

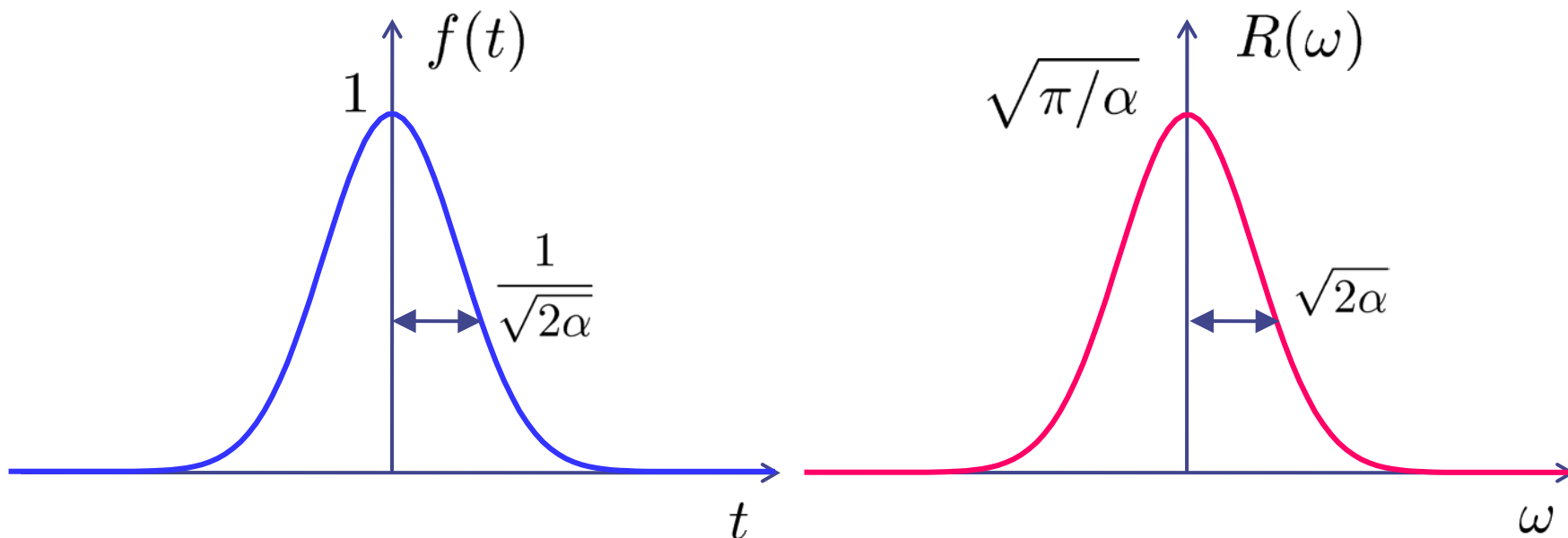
# ガウス関数のFourier変換

■  $f(t) = e^{-\alpha t^2}$



# ガウス関数のFourier変換

■  $f(t) = e^{-\alpha t^2}$



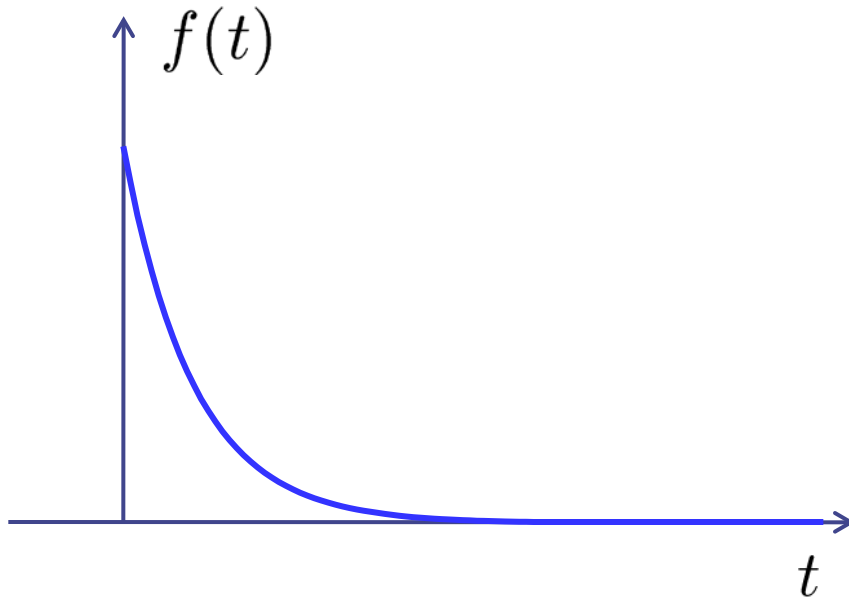
$$e^{-\alpha t^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

# ガウス関数のFourier変換の証明

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha}t + \frac{j\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha}} dt \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\end{aligned}$$

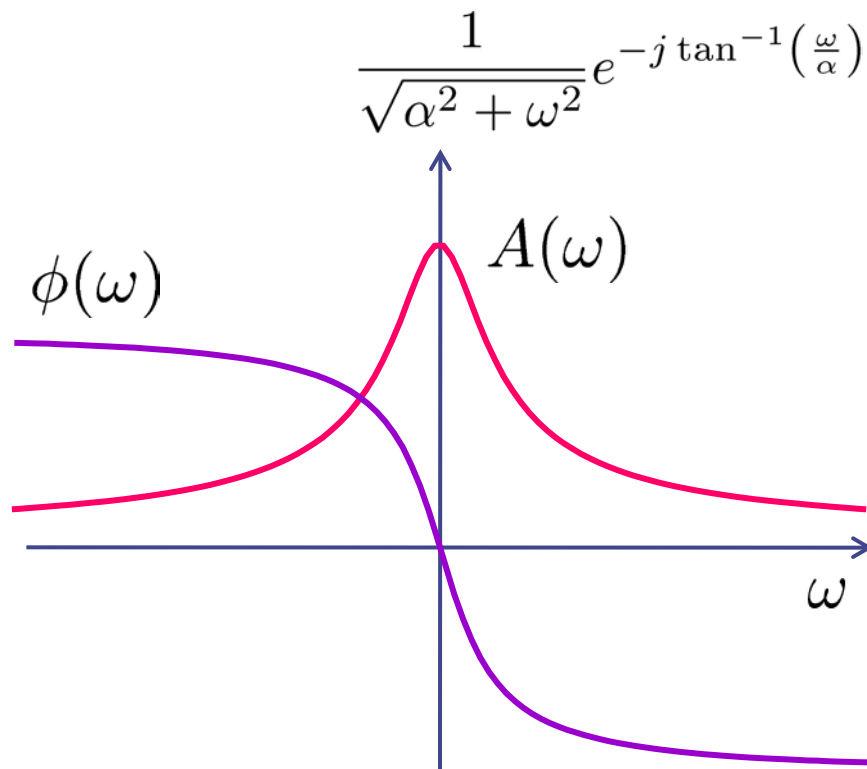
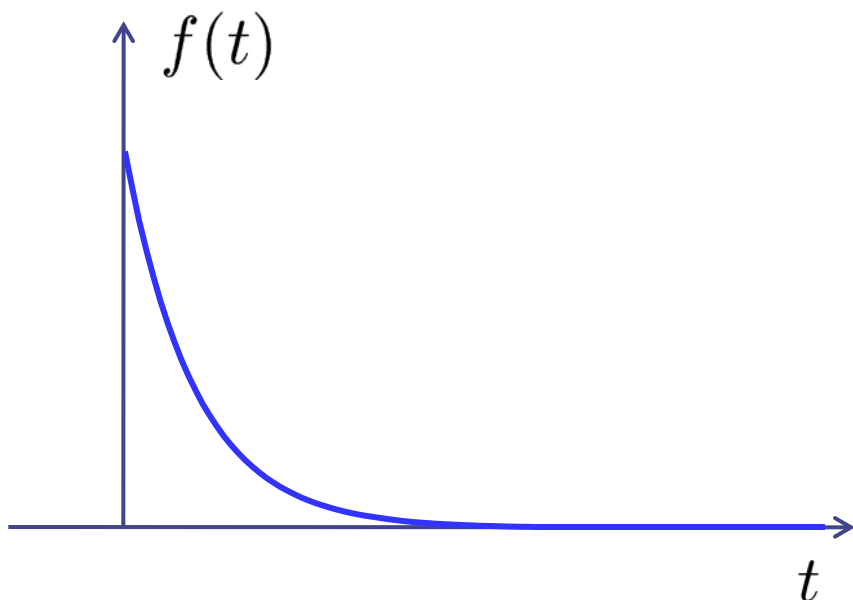
# 片側指数関数のFourier変換

■  $f(t) = e^{-\alpha t}$



# 片側指数関数のFourier変換

■  $f(t) = e^{-\alpha t}$



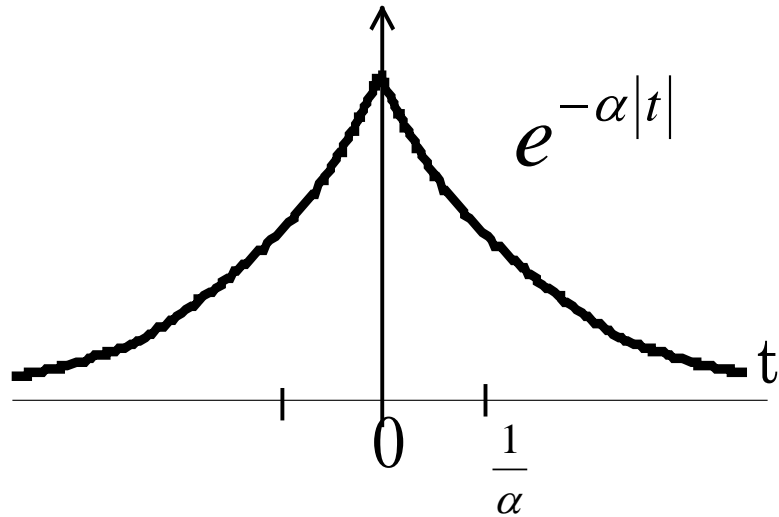
$$e^{-\alpha t} U(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad (\alpha > 0)$$

# 片側指数関数のFourier変換の証明

$$\begin{aligned} &\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} U(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\alpha + j\omega} \end{aligned}$$

# 両側指数関数のFourier変換

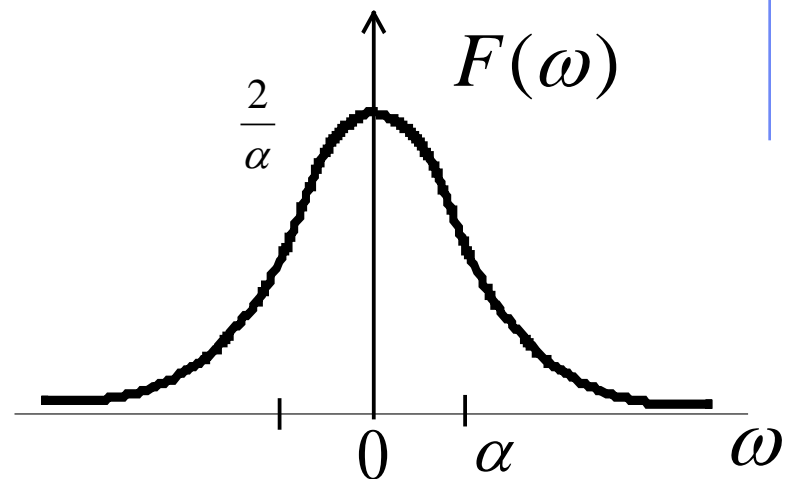
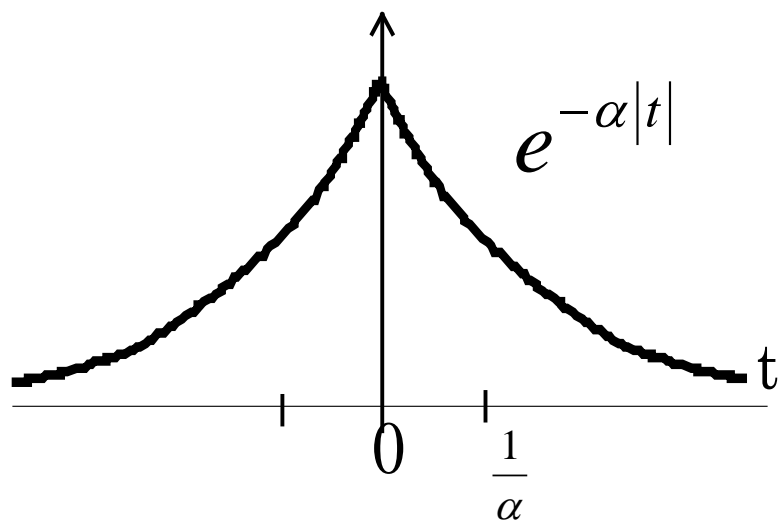
■  $f(t) = e^{-\alpha|t|}$





# 両側指数関数のFourier変換

■  $f(t) = e^{-\alpha|t|}$



$$e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\alpha > 0)$$

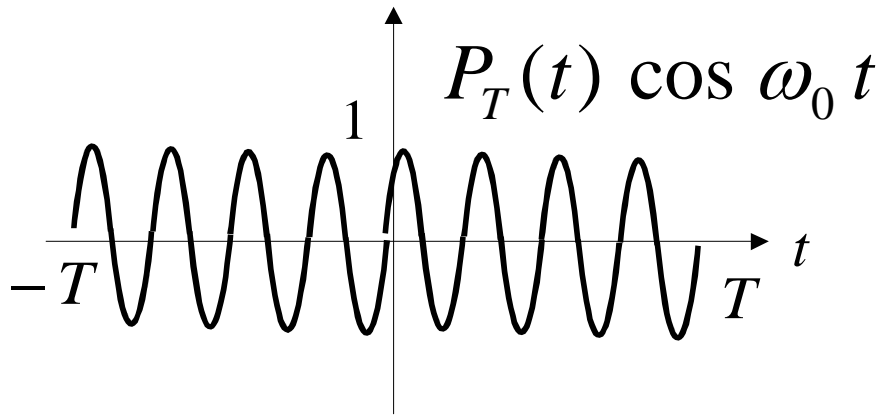
## 両側指数関数のFourier変換の証明

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{F}\left[e^{-\alpha t} U(t) + e^{\alpha t} U(-t)\right] \\ = \frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\alpha - j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t} U(-t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - j\omega)t} dt = \frac{1}{\alpha - j\omega}$$

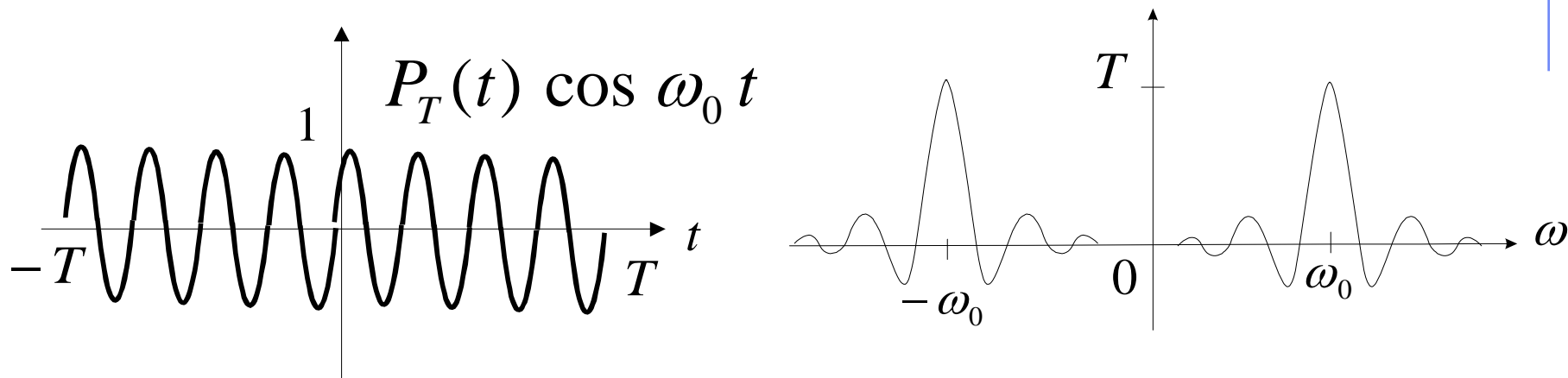
# 有限時間正弦波のFourier変換

■  $f(t) = P_T(t) \cos \omega_0 t$



# 有限時間正弦波のFourier変換

■  $f(t) = P_T(t) \cos \omega_0 t$



$$P_T(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{\sin(\omega + \omega_0)T}{\omega + \omega_0} + \frac{\sin(\omega - \omega_0)T}{\omega - \omega_0}$$

# 有限時間正弦波のFourier変換の証明

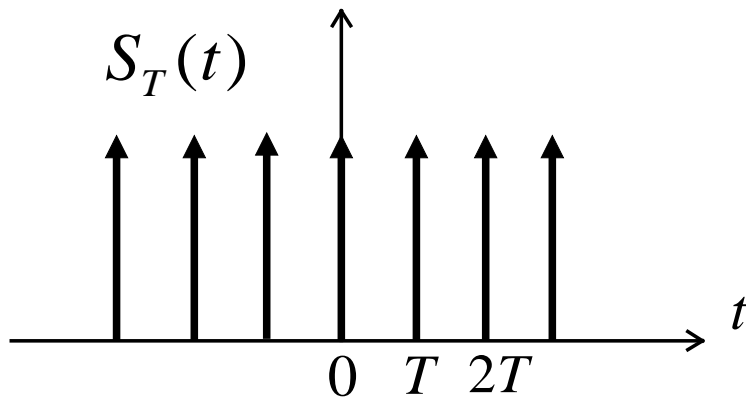
$$\because \mathbb{F}[P_T(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2\pi} \mathbb{F}[P_T(t)] * \mathbb{F}[\cos \omega_0 t]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{2 \sin \omega T}{\omega} * [\pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$= \frac{\sin(\omega + \omega_0)T}{\omega + \omega_0} + \frac{\sin(\omega - \omega_0)T}{\omega - \omega_0}$$

# 周期 $\delta$ 関数のFourier変換

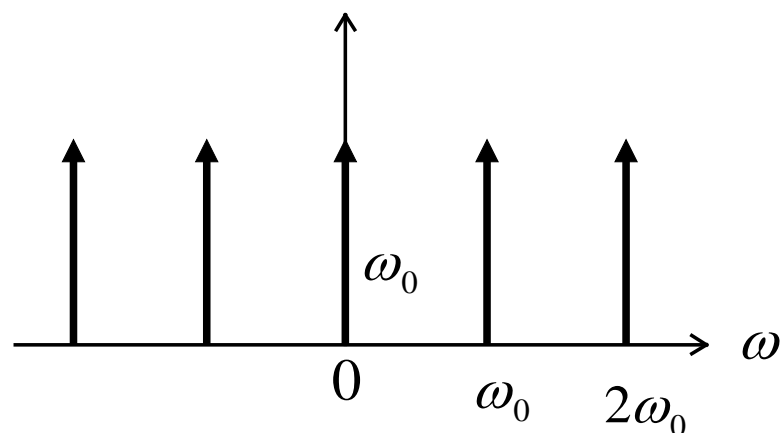
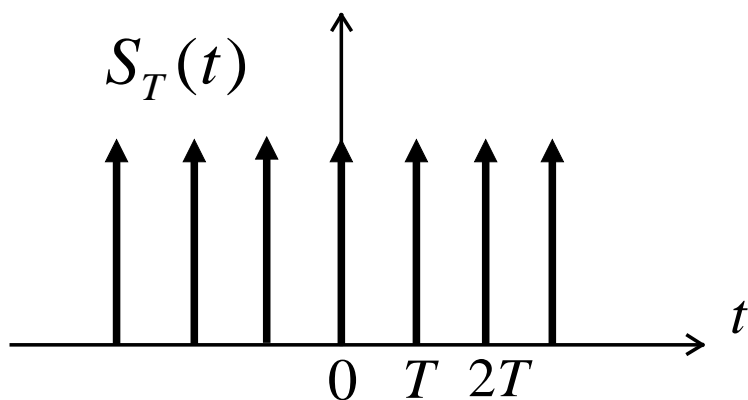
■  $f(t) = S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$



# 周期 $\delta$ 関数のFourier変換

■  $f(t) = S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

$$F(\omega) = \omega_0 S_{\omega_0}(\omega)$$



$$S_T(t) \leftrightarrow \omega_0 S_{\omega_0}(\omega)$$

$$\omega_0 = 2\pi/T$$

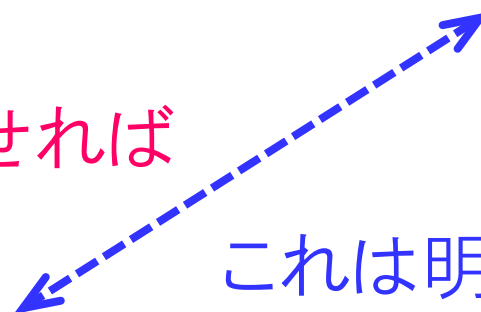
# 周期 $\delta$ 関数のFourier変換の証明1

$$S_T(t) \quad \longleftrightarrow \quad \omega_0 S_{\omega_0}(\omega)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$



これを示せれば

$$\stackrel{?}{=} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$



これは明らか

$$\because e^{jat} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - a)$$



## 周期 $\delta$ 関数のFourier変換の証明2

$$\begin{aligned} K_N(t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{jn\omega_0 t} \\ &= \frac{e^{j(N+1)\omega_0 t} - e^{-jN\omega_0 t}}{T(e^{j\omega_0 t} - 1)} \cdot \frac{e^{-\frac{j\omega_0 t}{2}}}{e^{-\frac{j\omega_0 t}{2}}} \\ &= \frac{e^{j(N+\frac{1}{2})\omega_0 t} - e^{-j(N+\frac{1}{2})\omega_0 t}}{T(e^{\frac{j\omega_0 t}{2}} - e^{-\frac{j\omega_0 t}{2}})} = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{T \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)} \end{aligned}$$

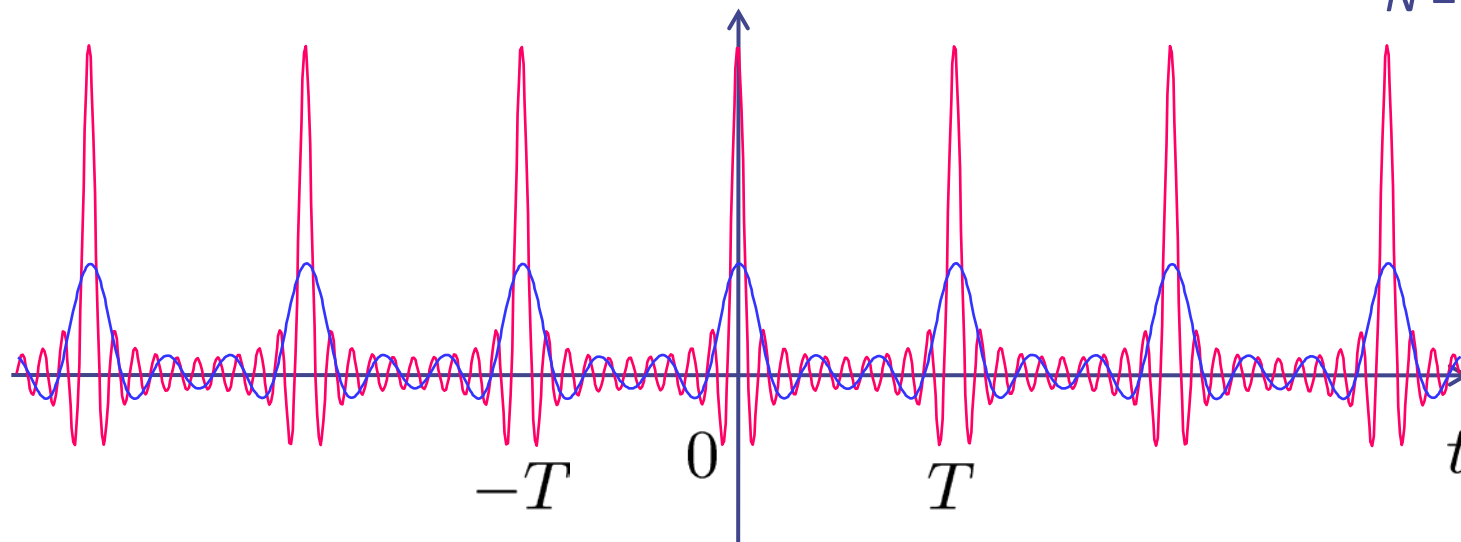
# 周期 $\delta$ 関数のFourier変換の証明3

$$K_N(t) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{T \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}$$

$$\text{周期 } T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} K_N(t) = 2N + 1$$

—  $N=3$   
—  $N=10$



# 周期 $\delta$ 関数のFourier変換の証明4

区間  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  で  $K_N(t) \rightarrow \delta(t)$  を示せば

$\lim_{N \rightarrow \infty} K_N(t) = S_T(t)$  が成立

$$K_N(t) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{T \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{Tt} \cdot \frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}$$

ここで,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{Tt} = \frac{\pi}{T}\delta(t)$

$$\therefore \delta(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega t}{\pi t}$$

# 周期 $\delta$ 関数のFourier変換の証明5

$\frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)}$  は区間  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  で有界

$|t| < \frac{T}{2}$  に対して  $\frac{2}{\omega_0}$

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} K_N(t) &= \frac{\pi}{T} \frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)} \delta(t) = \frac{\pi}{T} \left. \frac{t}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)} \right|_{t=0} \delta(t) \\ &= \delta(t)\end{aligned}$$