信号処理論第二
第9回（1/11）

情報理工学系研究科システム情報学専攻
亀岡 弘和
kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp

講義資料

http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/sp2/

第8章

ヒルベルト変換と最小位相関数

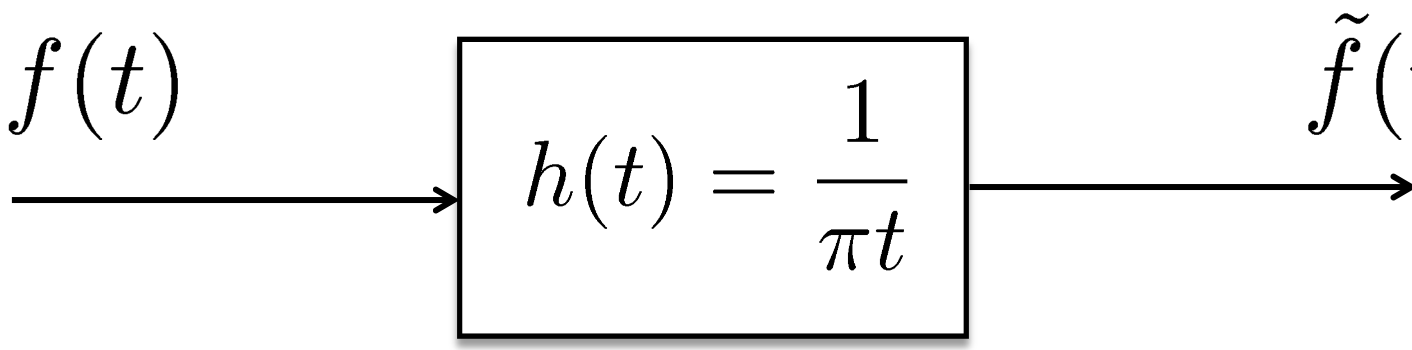
因果関数の性質

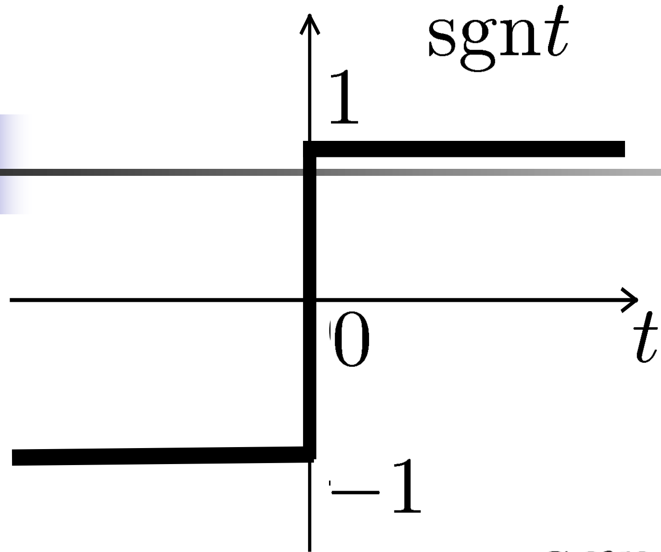
- Laplace変換が右半平面で解析的（極をもたない）
- Fourier変換の実部R(ω)と虚部X(ω)がHilbert変換対

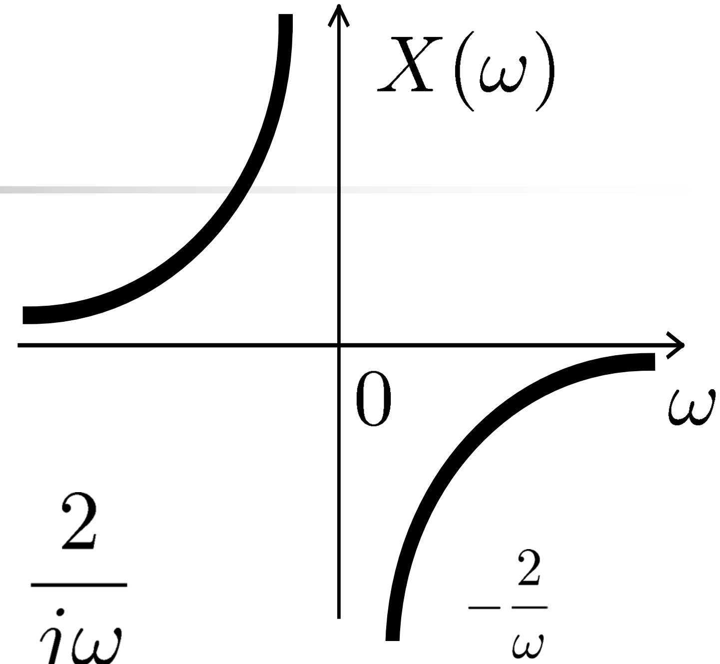
$$
\begin{cases}
X(\omega) = -\dfrac{1}{\pi\omega} * R(\omega) = -\dfrac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{R(y)}{\omega - y}\mathrm{d}y \\
R(\omega) = \dfrac{1}{\pi\omega} * X(\omega) = -\dfrac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{X(y)}{\omega - y}\mathrm{d}y
\end{cases}
$$

Hilbert変換

$$\tilde{f}(t) = f(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau$$







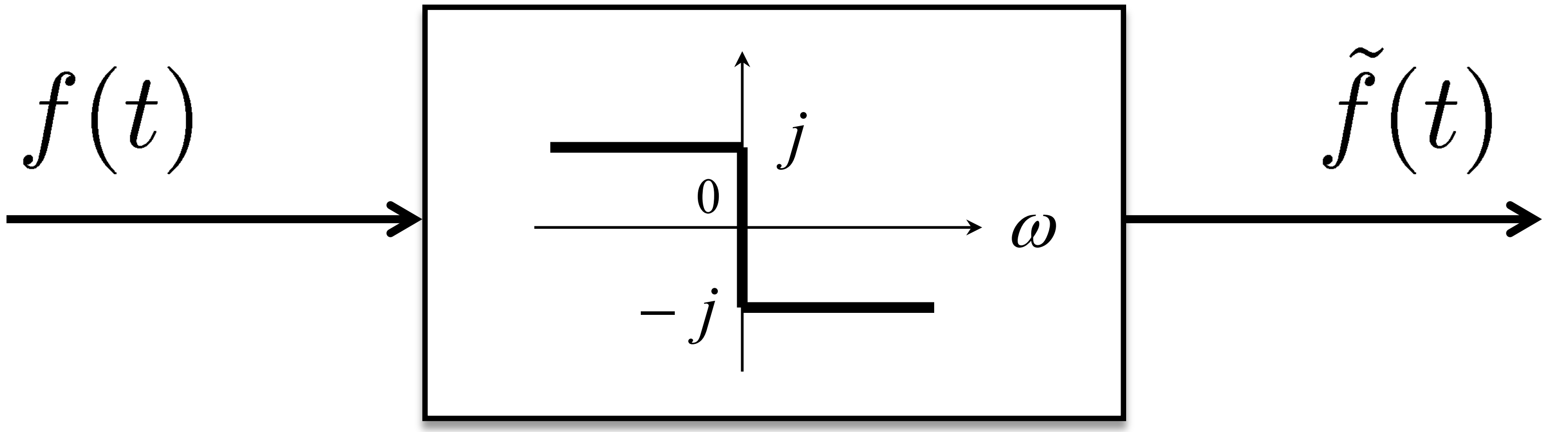
$$\mathrm{sgn}t \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$\frac{j}{2\pi}\mathrm{sgn}t \longleftrightarrow \frac{1}{\pi\omega}$$

$$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

$$\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow -j\mathrm{sgn}\omega$$

Hilbert変換のフィルタとしての表現



$$H(\omega) = -j\mathrm{sgn}\omega$$

$$\tilde{F}(\omega) = -j\mathrm{sgn}\omega \cdot F(\omega)$$

Hilbert変換の例

$$f(t) = \cos \omega_0 t$$

$$F(\omega) = \pi \{ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \}$$

$$\tilde{F}(\omega) = -j\pi \{ \delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0) \}$$

$$\tilde{f}(t) = \sin \omega_0 t$$

因果関数のFourier変換

因果関数： $h(t) = 0, \quad \forall t < 0$

$$g(t) = \frac{h(t) + h^*(-t)}{2} \longrightarrow G(\omega)\text{は実関数}$$

$$h(t) = 2g(t)\underline{U(t)}$$

Heavisideの
ステップ関数

$$= g(t)(1 + \mathrm{sgn} t)$$

$$H(\omega) = G(\omega) * (2\pi\delta(\omega) + \frac{2}{j\omega})$$

$$= G(\omega) + j\tilde{G}(\omega)$$

Hilbert変換対

- $h(t)$ を原点に特異点を持たない因果関数

$$h(t) = 0, \quad \forall t < 0$$

とする。$h(t)$ のFourier変換 $H(\omega)$ の実部 $R(\omega)$ と虚部 $X(\omega)$ の間には

$$\begin{cases} X(\omega) = -\dfrac{1}{\pi\omega} * R(\omega) = -\dfrac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{R(y)}{\omega - y}\mathrm{d}y \\ R(\omega) = \dfrac{1}{\pi\omega} * X(\omega) = -\dfrac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{X(y)}{\omega - y}\mathrm{d}y \end{cases}$$

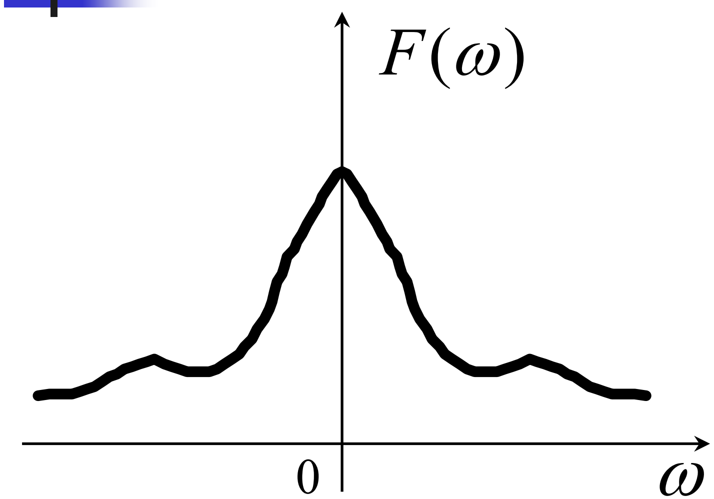
なる関係が成立する。このとき $R(\omega)$ と $X(\omega)$ は **Hilbert変換対をなす**、という。

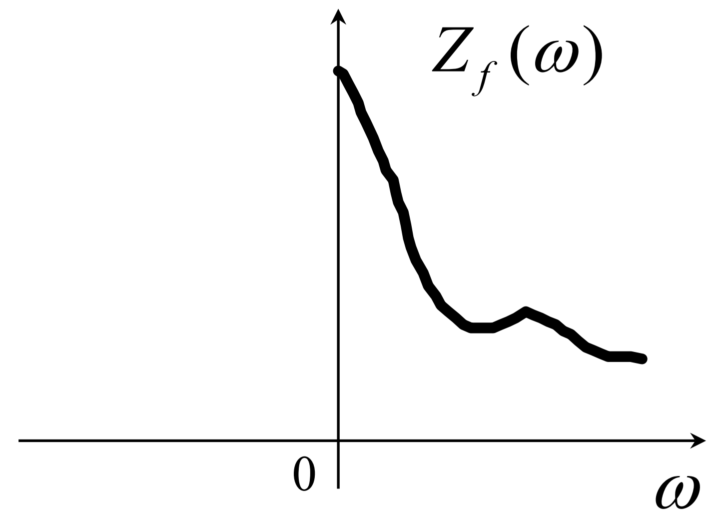
解析信号

解析信号：負の周波数成分が0の複素信号

$$z_f(t) = f(t) + j\tilde{f}(t)$$

$$\begin{aligned} Z_f(\omega) &= F(\omega) + j\tilde{F}(\omega) \\ &= F(\omega) - (-1)\mathrm{sgn}\omega \cdot F(\omega) \\ &= F(\omega)(1 + \mathrm{sgn}\omega) \\ &= 2F(\omega)U(\omega) \end{aligned}$$





$$z_f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

最小位相関数(minimum phase function)

- 最小位相関数：Laplace変換がRe(p)>0で極も零も持たないような関数

$$H_{\mathrm{m}}(p) = \frac{(p-q_1)(p-q_2)\cdots(p-q_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n)} \quad \mathrm{Re}[p_i] < 0, \mathrm{Re}[q_i] < 0$$

$$\Downarrow$$

$$\log H_{\mathrm{m}}(p) = \sum_i \log(p-q_i) - \sum_i \log(p-p_i)$$

零も極も対数をとると極になる

- 最小位相関数の対数関数は、右半平面で解析的→実部と虚部がHilbert変換対

最小位相関数のゲインと位相

$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ とすると,

$$\log H(j\omega) = \underbrace{\log A(\omega)}_{\text{実部がゲイン特性}} + j\underbrace{\phi(\omega)}_{\text{虚部が位相特性}}$$

最小位相関数のゲイン（対数）と位相はHilbert変換対の関係となる

全域通過関数(All-pass function)

- 全域通過関数:
  $|H_0(j\omega)| = 1$ となる安定かつ因果的な関数

性質: 全域通過関数の零点と極は複素平面上で虚軸に関して対称に存在する。すなわち、p_i を極にもつならば、$-p_i^*$ を零点にもつ。

$$H_0(p) = \frac{(p+p_1^*)(p+p_2^*)\cdots(p+p_m^*)}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_m)} \quad \mathrm{Re}[p_i] < 0$$

全域通過関数の振幅特性

2つの複素数 M_i, N_i が虚軸に関して対称ならば、

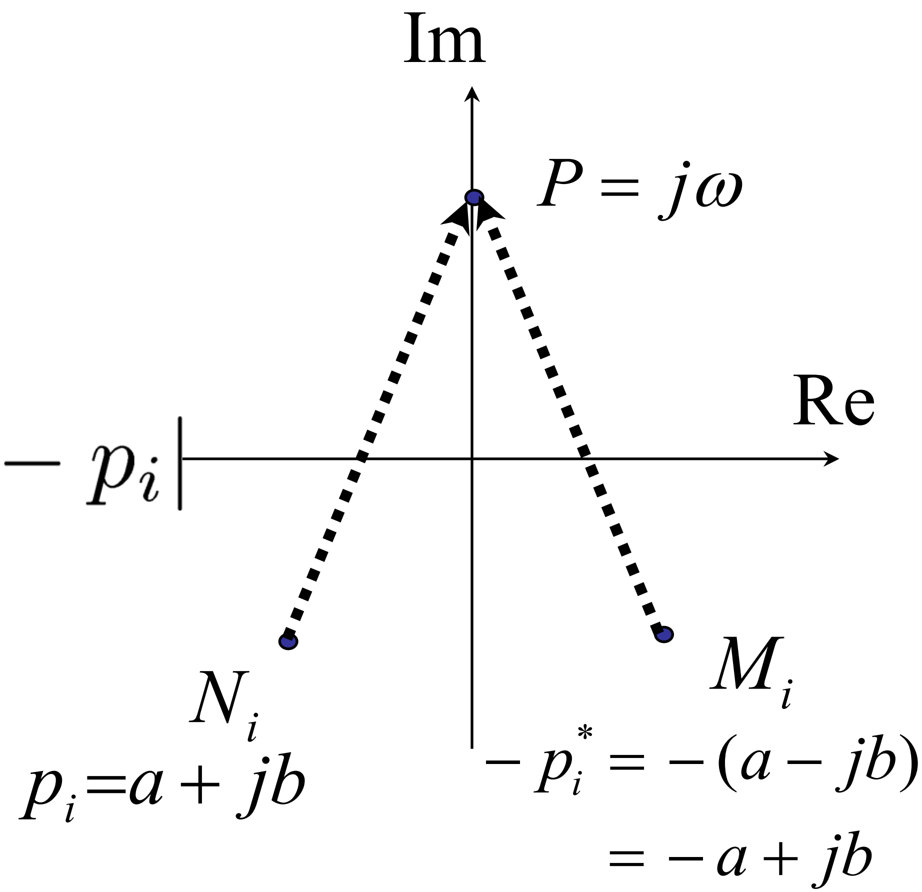
$$\frac{M_i P}{N_i P} = 1$$

なので、

$$\forall\omega,\ \left|j\omega + p_i^*\right| = \left|j\omega - p_i\right|$$

が成立する。

ゆえに $\left|H_0(j\omega)\right| = 1$



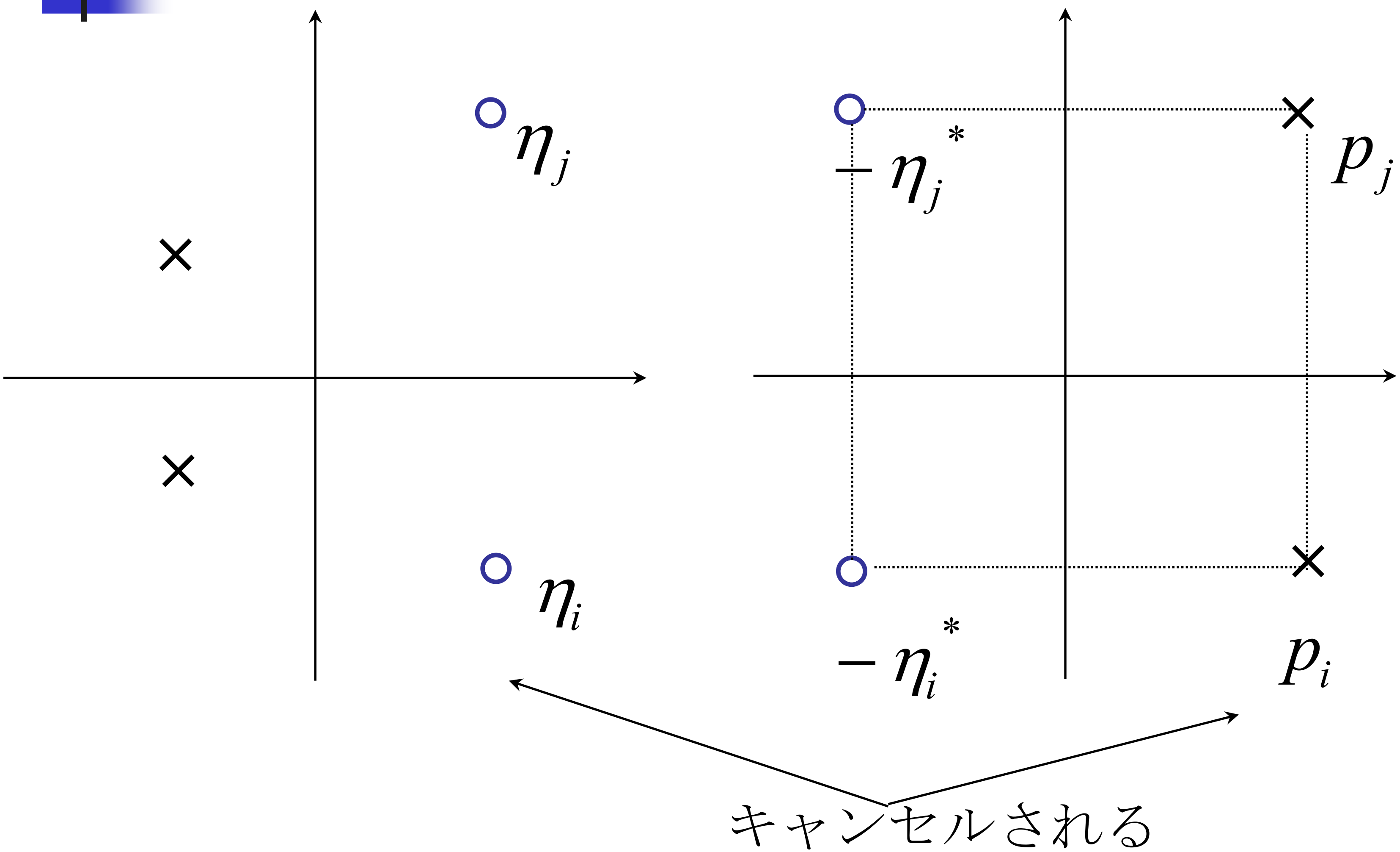
最小位相関数と全域通過関数による表現

安定なフィルタH(p)は最小位相関数$H_m(p)$と全域通過関数$H_0(p)$の積で表すことができる

（例題）以下の最小位相関数と振幅特性が等しい安定なフィルタを作るにはどのような全域通過関数をかければ良いか？

$$H_{\mathrm{m}}(p) = \frac{(p+2)(p+4)}{(p+1)(p+3)}$$

$H(\omega)$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{1}{H_0(\omega)}$



$H_m(\omega)$