

第10回

音声音響信号処理

(WienerフィルタとKalmanフィルタ)

亀岡弘和

東京大学大学院情報理工学系研究科

日本電信電話株式会社

NTTコミュニケーション科学基礎研究所

講義内容(キーワード)

- 信号処理、符号化、標準化の実用システム例の紹介
- 情報通信の基本(誤り検出、訂正符号、変調、IP)
- 符号化技術の基本(量子化、予測、変換、圧縮)
- 音声分析・合成・認識・強調、音楽信号処理
- 統計的信号処理の基礎(スペクトル、ガウス過程、最尤推定)
- ガウス性確率変数の基本性質
- 時間周波数分析(短時間フーリエ変換、ウェーブレット変換)
- ウィナーフィルタとカルマンフィルタ
- 音声生成過程のモデル(ソースフィルタ理論と藤崎モデル)
- 自己回帰モデルと線形予測分析
- 独立成分分析によるブラインド音源分離
- 非負値行列因子分解によるスペクトログラムの分解表現
- スペクトル間擬距離
- 最適化アルゴリズム(EMアルゴリズム、補助関数法)

講義スケジュール

10/ 3	守谷先生担当
10/17	守谷先生担当
10/24	線形予測分析と自己回帰モデル
10/31	対称性を利用した雑音抑圧
11/ 7	(休講)
11/14	時間周波数解析
11/21	非負値行列因子分解
11/28	統計的手法による音声強調
12/ 5	独立成分分析によるブラインド音源分離
12/12	
12/19	(休講)
→ 1/16	WienerフィルタとKalmanフィルタ
1/23	
1/30	

成績評価

◆レポート課題

- 本講義に関連する論文を1つ選び、発表資料形式(パワーポイント等)にまとめて学期末に提出してください。提出先は最終講義にてお知らせします。
- 「どの程度本質を理解しているか」「要点が分かりやすく記述されているか」「なぜその論文を重要と考えたか」を評価の規準にして採点します。
- 毎回の講義後にその回の講義に関連する論文を1つ挙げる予定です。それらの中から選んでも良いですし、自分で自由に探してきてもOKです。

◆講義の感想

- レポートとともに講義に対する感想文も一緒に提出して下さい。

※講義用ホームページのURL:

<http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/SAP/>

本日の話題

◆雑音が重畳した観測信号から原信号を復元するための信号処理

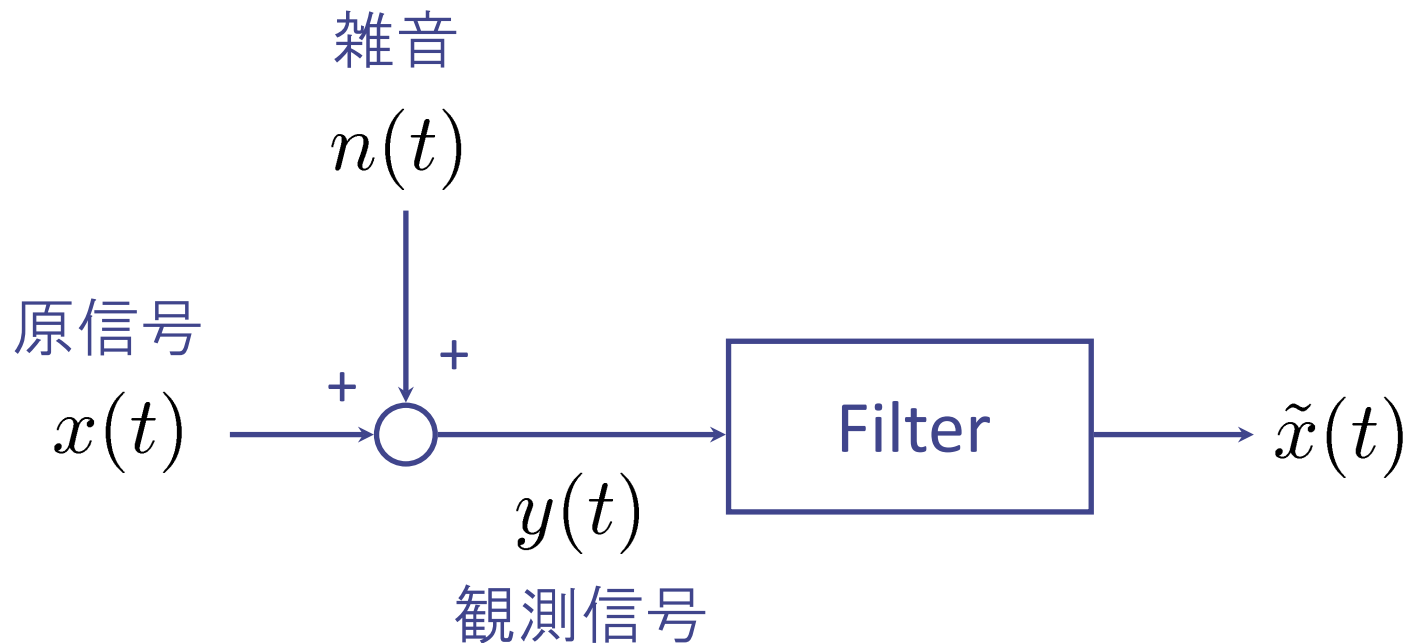
◆Wienerフィルタ

- 原信号と観測信号の定常性を仮定
- 原信号の最小平均二乗誤差(Minimum Mean Square Error)推定量を得る時不変フィルタ

◆Kalmanフィルタ

- 原信号と観測信号の定常性を仮定しない
- 原信号の最小平均二乗誤差(Minimum Mean Square Error)推定量を得る時変フィルタ

信号の推定問題



雑音が重畳した観測信号から
どうやって原信号を推定するか？

Wienerフィルタ

◆観測信号 $y(t)$ から信号 $x(t)$ を推定する枠組み

◆線形時不変推定器:

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)y(t - \tau)d\tau$$

◆最小平均二乗誤差規範:

$$J[h(t)] = E[|\hat{x}(t) - x(t)|^2]$$

◆ $y(t), x(t)$ の定常性の仮定が必要

直交原理 (The Orthogonality Principle)

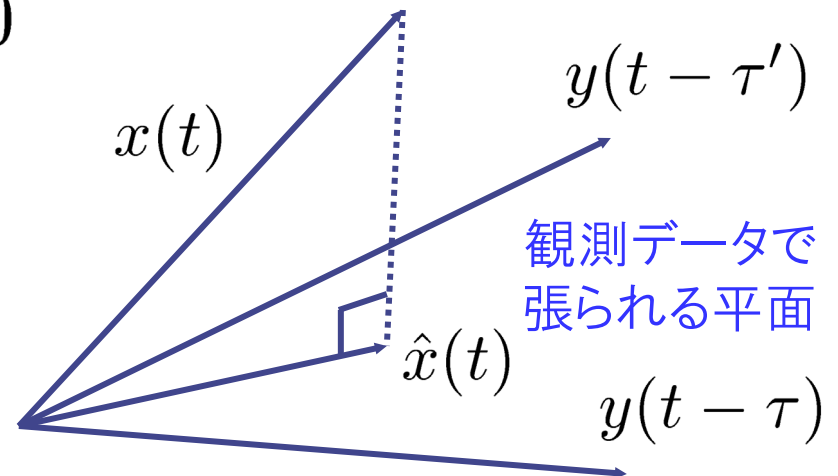
◆線形推定値 $\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)y(t - \alpha)d\alpha$ が平均二乗誤差を最小とするとき, 以下の直交原理が成り立つ

◆直交原理 I : 誤差は観測値と直交する

$$\mathbb{E}[\{x(t) - \hat{x}(t)\}y(t - \tau)] = 0$$

◆直交原理 II : 誤差は最適推定値と直交する

$$\mathbb{E}[\{x(t) - \hat{x}(t)\}\hat{x}(t)] = 0$$



離散系の直交原理

◆ n 個の確率変数 $s_1, s_2, \dots, s_n$ から

$$\hat{s}_0 = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_n s_n$$

によって, s_0 を推定する問題を考える。

◆ $I = E[|s_0 - \hat{s}_0|^2]$ を最小とする

$a_1, a_2, \dots, a_n$ は何か？

◆ ただし $i = 0, 1, \dots, n$ に対して,

$$\begin{cases} E[s_i] = 0 \\ R_{ij} = E[s_i s_j^*] \end{cases}$$

とする。

直交原理 I の確認 (1/2)

$$E[(s_0 - \hat{s}_0)s_i^*] = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満足する $\hat{s}_0 = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_n s_n$ は

$I = E[|s_0 - \hat{s}_0|^2]$ を最小化するか？

直交原理 I の確認 (2/2)

直交原理を満たすとは限らない
任意の線形推定値

$$s_0 - \underbrace{(A_1 s_1 + \cdots + A_n s_n)}_{\text{任意の線形推定値}} \\ = s_0 - \underbrace{(a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n)}_{\text{直交原理を満たす線形推定値}} + \{(a_1 - A_1)s_1 + \cdots + (a_n - A_n)s_n\}$$

直交原理を満たす線形推定値

$$\begin{aligned} & E[|s_0 - (A_1 s_1 + \cdots + A_n s_n)|^2] \\ &= E[|s_0 - \hat{s}_0|^2] + E[|(a_1 - A_1)s_1 + \cdots + (a_n - A_n)s_n|^2] \\ &\geq E[|s_0 - \hat{s}_0|^2] \end{aligned}$$

直交原理より, クロスターム $E[(s_0 - \hat{s}_0)s_i^*]$ は 0

直交原理を満たす線形推定値が平均二乗誤差最小

直交原理によるWiener-Hopfの積分方程式の導出

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)y(t - \alpha)d\alpha \text{ とすると,}$$

$$E[\{x(t) - \hat{x}(t)\}y(t - \tau)] = 0 \text{ より,}$$

$$E \left[\left\{ x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)y(t - \alpha)d\alpha \right\} y(t - \tau) \right] = 0$$

$$E[\{x(t)y(t - \tau)\}] = E \left[\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)y(t - \alpha)d\alpha \right\} y(t - \tau) \right]$$

$$\therefore \underline{R_{xy}(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{R_{yy}(\tau - \alpha)}h(\alpha)d\alpha$$

∵ 定常性より

フィルタが非因果的な場合の解法

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau - \alpha) h(\alpha) d\alpha$$

両辺をFourier変換

$$S_{xy}(\omega) = S_{yy}(\omega) H(\omega)$$

$$\therefore H(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{yy}(\omega)}$$

$R_{xy}(\tau) = 0$ の場合

$$R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau), R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) + R_{nn}(\tau)$$

$$\therefore H(\omega) = \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{xx}(\omega) + S_{nn}(\omega)}$$

Kalmanフィルタ

◆観測信号 $y(\tau)$ ($t_0 \leq \tau < t$) から、
状態 $x(t)$ を推定する枠組み

◆線形時変推定器:

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma$$

◆最小二乗規範:

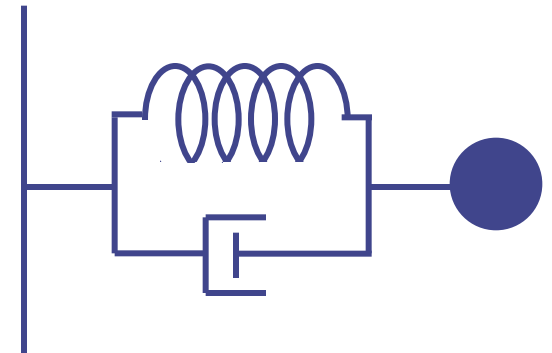
$$J[h(t, \tau)] = E[|\hat{x}(t) - x(t)|^2]$$

◆実際には、上記の時変インパルス応答を
畳み込むことはなく、逐次的な推定が可能

測定対象に対するモデルの導入

◆例) バネマスダンパ系の質点位置の推定

- バネマスダンパ系の質点が、ランダムな外力 $F(t)$ により駆動されている
- 質点の位置は、観測雑音を含む測定器によって観測される



$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

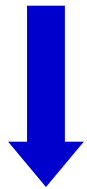
$$y(t) = x(t) + \underline{w(t)}$$

観測雑音

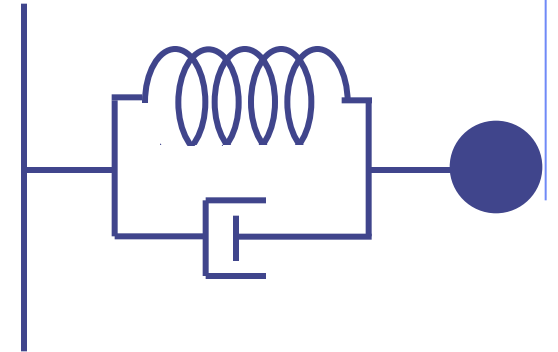
状態空間表現への変形

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

$$y(t) = x(t) + w(t)$$



1変数高階微分方程式表現から
多変数1階微分方程式表現へ



$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\gamma/m) & -(k/m) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1/m)F(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

駆動雑音

$$y(t) = (0 \ 1) \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + w(t)$$

観測雑音

状態空間表現

Kalman Filterの問題設定

モデル: $\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)\underline{v(t)}$

駆動雑音

観測: $y(t) = C(t)x(t) + \underline{w(t)}$

観測雑音

◆仮定

- $v(t)$ 、 $w(t)$ は互いに独立な正規白色雑音

$$E[v(t)] = 0 \quad E[v(t)v^T(\tau)] = V\delta(t - \tau)$$

$$E[w(t)] = 0 \quad E[w(t)w^T(\tau)] = W\delta(t - \tau)$$

$$E[v(t)w^T(\tau)] = 0$$

- システムパラメータ: $A(t), B(t), C(t)$ と、雑音共分散 W, V は既知
- W は逆行列をもつ

Kalmanフィルタの導出

- 1) Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式の導出
- 2) 微分方程式への変形
- 3) x の逐次推定式の導出
- 4) Kalman ゲインの決定
- 5) 誤差共分散の更新式

1) Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式の導出

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma \text{ より}$$

$$E \left[\left\{ x(t) - \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma \right\} y^T(\tau) \right] = 0$$
$$(t_0 \leq \sigma < t)$$



直交原理

$$E[x(t) y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) E[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma$$
$$(t_0 \leq \sigma < t)$$

Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式

2) 微分方程式への変形:方針

◆Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式

$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma$$

◆両辺をtで微分し、システムのモデル:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t)$$

を適用して変形することを考える

2) 微分方程式への変形: 左辺の微分

左辺をtで微分

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} E[x(t)y^T(\tau)] \\ &= E[\{A(t)x(t) + B(t)v(t)\}y^T(\tau)] \\ &= A(t)E[\underline{x(t)y^T(\tau)}] + B(t)\underline{E[v(t)y^T(\tau)]} \\ &= \int_{t_0}^t A(t)H(t, \sigma)E[y(\sigma)y^T(\tau)]d\sigma \end{aligned} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ =0 \end{matrix}$$

WHK方程式を適用

2) 微分方程式への変形: 右辺の微分

右辺を t で微分

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t H(t, \sigma) E[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) E[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma + H(t, t) E[y(t) y^T(\tau)] \end{aligned}$$

Leibniz' Rule

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx = \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx + f(t, b) \frac{db}{dt} - f(t, a) \frac{da}{dt}$$

2) 微分方程式への変形: 右辺の微分(続)

$$y(t) = C(t)x(t) + w(t)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) E[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma + H(t, t) E[\underline{y(t)} y^T(\tau)] \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) E[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma + H(t, t) C(t) \underline{E[x(t) y^T(\tau)]} \\ & \quad + H(t, t) \underline{E[w(t) \{x^T(\tau) C^T(\tau) + w^T(\tau)\}]} \end{aligned}$$

WHK方程式

$$\begin{aligned} &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) E[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma \\ & \quad + \int_{t_0}^t H(t, t) C(t) H(t, \sigma) E[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[w(t) x^T(\tau)] &= 0 \quad (\tau < t) \\ E[w(t) w^T(\tau)] &= 0 \quad (\tau < t) \end{aligned}$$

WHK方程式

$$E[x(t) y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) E[y(\sigma) y^T(\tau)] d\sigma$$

2) 微分方程式への変形:導出

左辺の微分=右辺の微分より

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t A(t)H(t, \sigma)E[y(\sigma)y^T(\tau)]d\sigma \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma)E[y(\sigma)y^T(\tau)]d\sigma \\ & \quad + \int_{t_0}^t H(t, t)C(t)H(t, \sigma)E[y(\sigma)y^T(\tau)]d\sigma \end{aligned}$$



$$\int_{t_0}^t G(t, \sigma)E[y(\sigma)y^T(\tau)]d\sigma = 0 \quad (t_0 \leq \sigma < t)$$

$$G(t, \sigma) = A(t)H(t, \sigma) - \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) - K(t)C(t)H(t, \sigma)$$

$$K(t) = H(t, t)$$

2) 微分方程式への変形: 導出

再びWHK方程式に着目

$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma$$

$$\int_{t_0}^t G(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma = 0 \text{ より}$$

$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t \{H(t, \sigma) + G(t, \sigma)\} E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma$$

$H(t, \sigma) + G(t, \sigma)$ もWHK方程式を満たす

2) 微分方程式への変形:導出

◆よって以下の2つはどちらも最適推定値

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma$$

$$\hat{x}'(t) = \int_{t_0}^t \{H(t, \sigma) + G(t, \sigma) y(\sigma)\} d\sigma$$

◆ゆえに, これらの二乗誤差は0にならない

$$E[\{\hat{x}'(t) - \hat{x}(t)\}\{\hat{x}'(t) - \hat{x}(t)\}^T] = 0$$

2) 微分方程式への変形:導出

$$\begin{aligned} & E[\{\hat{x}'(t) - \hat{x}(t)\}\{\hat{x}'(t) - \hat{x}(t)\}^T] \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t G(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] G^T(t, \tau) d\sigma d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t G(t, \sigma) C(t) \underbrace{E[x(\sigma)x^T(\tau)]}_{\text{半正定値}} C^T(t) G^T(t, \tau) d\sigma d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t G(t, \sigma) \underbrace{W}_{\text{正定値}} G^T(t, \sigma) d\sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

よってこれが成り立つためには

$H(t, \sigma)$ の微分方程式

$$G(t, \sigma) = A(t)H(t, \sigma) - \frac{\partial}{\partial t}H(t, \sigma) - K(t)C(t)H(t, \sigma) = 0$$

3) xの逐次推定式の導出

◆ x の推定式

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma$$

◆ 両辺をtで微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t) y(t) \end{aligned}$$

3) xの逐次推定式の導出（続）

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t)y(t)$$

$$A(t)H(t, \sigma) - \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) - K(t)C(t)H(t, \sigma) = 0$$

以上の2式より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t)y(t) \\ &= \{A(t) - K(t)C(t)\} \int_{t_0}^t H(t, \sigma) y(\sigma) d\sigma + K(t)y(t) \\ &= \{A(t) - K(t)C(t)\}\hat{x}(t) + K(t)y(t)\end{aligned}$$

Kalman-Bucyフィルタ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= [A(t) - K(t)C(t)]\hat{x}(t) + K(t)y(t) \\ &= \hat{x}(t_0) = x_0\end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \\ &= \hat{x}(t_0) = x_0\end{aligned}$$

4) Kalmanゲインの決定

$K(t) = H(t, t)$ を決定したい

方針: 観測方程式 $y(\tau) = Cx(\tau) + w(\tau)$
に基づき、WHK方程式を変形

$$E[x(t)y^T(\tau)] = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) E[y(\sigma)y^T(\tau)] d\sigma$$

$(t_0 \leq \tau < t)$

Wiener-Hopf-Kalmanの積分方程式

4) Kalmanゲインの決定: WHK方程式の変形

$$\begin{aligned} & \underline{E[x(t)y^T(\tau)]} - \int_{t_0}^t H(t, \sigma) \underline{E[y(\sigma)y^T(\tau)]} d\sigma \\ = & \underline{E[x(t)x^T(\tau)]C^T(\tau)} - \int_{t_0}^t H(t, \sigma) \underline{E[y(\sigma)x^T(\tau)]C^T(\tau)} d\sigma \\ & - \int_{t_0}^t H(t, \sigma) \underline{W(\tau)\delta(\sigma - \tau)} d\sigma \\ = & E[\{x(t) - \underline{\hat{x}(t)}\}x^T(\tau)]C^T(\tau) - H(t, \tau)W(\tau) = 0 \end{aligned}$$

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \sigma)y(\sigma)d\sigma$$

4) Kalmanゲインの決定: 誤差共分散による表現

$$E[\{x(t) - \hat{x}(t)\}x^T(\tau)]C^T(\tau) - H(t, \tau)W(\tau) = 0$$

$\tau \rightarrow t$ とすると

$$K(t)W(t) = E[\{x(t) - \hat{x}(t)\}x^T(t)]C^T(t)$$

$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ の共分散を $P(t) = E[e(t)e^T(t)]$ とすれば,
 $E[\{x(t) - \hat{x}(t)\}\hat{x}^T(t)] = 0$ (直交原理) より

$$\begin{aligned} & E[\{x(t) - \hat{x}(t)\}x^T(t)] \\ &= E[\{x(t) - \hat{x}(t)\}\{x^T(t) - \hat{x}^T(t)\}] = P(t) \end{aligned}$$

$$K(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}(t)$$

5) 誤差共分散の更新式:方針

- ◆ 誤差 $e(t)$ の微分方程式を導出
- ◆ 誤差共分散行列 $P(t)$ の微分方程式を導出
- ◆ これを解いて更新式を導出

5) 誤差共分散の更新式: 推定誤差が従う微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\hat{x}(t) + K(t)y(t)$$



$$\frac{d}{dt}e(t) = [A(t) - K(t)C(t)]e(t) + K(t)C(t)x(t)$$

$$+ B(t)u(t) - K(t)\{C(t)x(t) + w(t)\}$$

$$= [A(t) - K(t)C(t)]e(t) + B(t)u(t) - K(t)w(t)$$

$e(t)$ の微分方程式

(参考) 行列微分方程式の解

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t)$$

初期条件 $x(t_0)$, 入力 $v(t)(t \geq t_0)$



$$\text{解: } x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \underbrace{\Phi(t, \tau)B(\tau)}_{\text{遷移行列}} v(\tau) d\tau$$

遷移行列は下記の微分方程式の基本解

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \tau) &= A(t)\Phi(t, \tau) \\ \Phi(\tau, \tau) &= I \end{aligned}$$

5) 誤差共分散の更新式: 推定誤差の導出

$$\frac{d}{dt}e(t) = [A(t) - K(t)C(t)]e(t) + B(t)u(t) - K(t)w(t)$$

$\frac{d}{dt}\Phi_e(t, \tau) = [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t, \tau)$ の解を
遷移行列 $\Phi_e(t, \tau)$ とすると

$$e(t) = \Phi_e(t, t_0)e(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_e(t, \tau)[B(\tau)u(\tau) - K(\tau)w(\tau)]d\tau$$

5) 誤差共分散の更新式: 誤差共分散の微分方程式

◆ $e(t_0)$ と $v(t)$, $w(t)$ は無相関と仮定

$$\begin{aligned} P(t) &= \mathbb{E}[e(t)e(t)^{\top}] \\ &= \Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^{\top}(t, t_0) \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^t \Phi_e(t, \tau)\{B(\tau)v(\tau) - K(\tau)w(\tau)\}d\tau \right. \\ &\quad \left. \int_{t_0}^t \{v^{\top}(\sigma)B^{\top}(\sigma) - w^{\top}(\sigma)K^{\top}(\sigma)\}\Phi_e^{\top}d\sigma \right] \end{aligned}$$

◆ $v(t)$ と $w(t)$ は互いに無相関なので

$$\begin{aligned} P(t) &= \Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^{\top}(t, t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^t \Phi_e(t, \tau)\left[B(\tau)V(\tau)B^{\top}(\tau) + K(\tau)W(\tau)K^{\top}(\tau)\right]\Phi_e^{\top}(t, \tau)d\tau \end{aligned}$$

5) 誤差共分散の更新式: 誤差共分散の微分方程式

◆両辺をtで微分

$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{d}{dt}\Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^T(t, t_0)$$

$$+ \Phi_e(t, t_0)P(t_0)\frac{d}{dt}\Phi_e^T(t, t_0)$$

$$+ \int_{t_0}^t \frac{d}{dt}\Phi_e(t, \tau)D(\tau)\Phi_e^T(t, \tau)d\tau$$

$$+ \int_{t_0}^t \Phi_e(t, \tau)D(\tau)\frac{d}{dt}\Phi_e^T(t, \tau)d\tau$$

$$+ \Phi_e(t, t)D(t)\Phi_e^T(t, t)$$

Leibniz' Rule
の適用

$$D(\tau) = B(\tau)V(\tau)B^T(\tau) + K(\tau)W(\tau)K^T(\tau)$$

5) 誤差共分散の更新式: 誤差共分散の微分方程式

◆ $\frac{d}{dt}\Phi_e(t, \tau) = [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t, \tau)$ を代入

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P(t) &= [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^\top(t, t_0) \\ &\quad + \Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^\top(t, t_0)[A(t) - K(t)C(t)]^\top \\ &\quad + \int_{t_0}^t [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t, \tau)D(\tau)\Phi_e^\top(t, \tau)d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t \Phi_e(t, \tau)D(\tau)\Phi_e^\top(t, \tau)[A(t) - K(t)C(t)]^\top d\tau \\ &\quad + D(t)\end{aligned}$$

$$D(\tau) = B(\tau)V(\tau)B^\top(\tau) + K(\tau)W(\tau)K^\top(\tau)$$

5) 誤差共分散の更新式: 誤差共分散の微分方程式

$$P(t) = \Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_e(t, \tau)D(\tau)\Phi_e^T(t, \tau)d\tau$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P(t) &= \underline{[A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^T(t, t_0)} \\ &\quad + \underline{\Phi_e(t, t_0)P(t_0)\Phi_e^T(t, t_0)[A(t) - K(t)C(t)]^T} \\ &\quad + \underline{\int_{t_0}^t [A(t) - K(t)C(t)]\Phi_e(t, \tau)D(\tau)\Phi_e^T(t, \tau)d\tau} \\ &\quad + \underline{\int_{t_0}^t \Phi_e(t, \tau)D(\tau)\Phi_e^T(t, \tau)[A(t) - K(t)C(t)]^T d\tau} \\ &\quad + D(t) \\ &= \underline{[A(t) - K(t)C(t)]P(t)} + \underline{P(t)[A(t) - K(t)C(t)]^T} + D(t)\end{aligned}$$

5) 誤差共分散の更新式: 誤差共分散の微分方程式

◆先に求めたKalmanゲインを代入

$$K(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P(t) = & A(t)P(t) - P(t)C^T(t)W^{-1}(t)C(t)P(t) \\ & + P(t)A^T(t) + B(t)V(t)B(t)^T \end{aligned}$$

この微分方程式を
Riccati方程式という

Kalmanゲインと誤差共分散

Kalmanゲイン

$$K(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}(t)$$

Riccati方程式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P(t) = & A(t)P(t) - P(t)C^T(t)W^{-1}(t)C(t)P(t) \\ & + P(t)A^T(t) + B(t)V(t)B(t)^T\end{aligned}$$

$$P(t_0) = X_0$$

本日の話題

◆雑音が重畳した観測信号から原信号を復元するための信号処理

◆Wienerフィルタ

- 原信号と観測信号の定常性を仮定
- 原信号の最小平均二乗誤差(Minimum Mean Square Error)推定量を得る時不変フィルタ

◆Kalmanフィルタ

- 原信号と観測信号の定常性を仮定しない
- 原信号の最小平均二乗誤差(Minimum Mean Square Error)推定量を得る時変フィルタ