等方的雑音共分散行列の対称分解に基づくブラインド無相関化の検討*

○田中 和樹，田中 章，宮腰 政明 (北大)，小野 順貴 (東大)

1　はじめに

近年，マイクロホンアレイによる音響信号処理の分野において，雑踏の喧騒や室内残響といった拡散性の雑音場に対し，高い対称性を有する結晶構造のアレイを用いることで，当該雑音場の具体的な相関構造を知ることなく，雑音を空間的に無相関化する技術 (以下，ブラインド無相関化) が提案されており，雑音抑制技術への適用等で顕著な成果を挙げている [1, 2, 3]．一方，ブラインド無相関化が実現できるアレイ配置が満たすべき条件については，これまで完全には解明されていなかった．

本稿では，ブラインド無相関化が可能なアレイ配置が満たすべき必要十分条件を明らかにし，実際にブラインド無相関化を実現するユニタリ行列を求める方法を示す．

2　雑音抑制問題の定式化

M 個のマイクロホンからなるアレイの観測が，時間周波数領域で，

$$\boldsymbol{x}(t,\omega) = \boldsymbol{d}(\omega)s(t,\omega) + \boldsymbol{n}(t,\omega) \tag{1}$$

で与えられているものとする．ここで，$\boldsymbol{x}(t,\omega) \in \mathbf{C}^M$ は観測信号ベクトル，$s(t,\omega) \in \mathbf{C}$ は目的信号，$\boldsymbol{d}(\omega) \in \mathbf{C}^M$ は既知のステアリングベクトル，$\boldsymbol{n}(t,\omega) \in \mathbf{C}^M$ は雑音ベクトルである．また，以下，s と $\boldsymbol{n}$ は零平均で互いに無相関であると仮定する．目的信号のパワースペクトル，及び，雑音の相関行列を各々r_s，$R_{\boldsymbol{n}}$ とし，* を随伴作用素 (共役転置) とすると，$\boldsymbol{x}$ に関する相関行列 $R_{\boldsymbol{x}}$ は，

$$R_{\boldsymbol{x}} = r_s\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^* + R_{\boldsymbol{n}} \tag{2}$$

と表現できる．ここで，何らかの方法により $T^*R_{\boldsymbol{n}}T$ を対角行列とするような行列 T が得られたとすると，当該行列により変換を受けた $T^*R_{\boldsymbol{x}}T$ の非対角要素は雑音の影響を受けないため，当該非対角要素の情報のみを利用することで，結果として雑音抑制が実現できることになる．

先行研究 [1, 2, 3] において，マイクロホン間のクロススペクトルがマイクロホン間の距離にのみ依存する，等方的雑音場を対象とした場合，正多角形や正多面体といった高い対称性を有するアレイ配置を用いれば，$R_{\boldsymbol{n}}$ の具体的な値に依存しない定行列によって，$R_{\boldsymbol{n}}$ のブラインド無相関化が実現できることが示されている．

小野らは [3] において，所与のアレイ配置に対応する相関行列を置換行列の線形結合で表現するという考え方に基づき，ブラインド無相関化可能な相関行列が満たすべき必要条件を明らかにしている．しかしながら，十分性に関しては個別の配置 (もしくはクラス) に対して個別の証明を与えるに留まっており，必要十分条件を与えるには至っていない．

3　対称分解に基づくブラインド無相関化の理論的検討

本節では，ブラインド無相関化を実現するアレイ配置が満たすべき必要十分条件を明らかにし，無相関化を実現する定行列の性質について述べる．

等方的雑音場における雑音をマイクロホンアレイで観測した場合の相関行列は，等距離のマイクロホン対に対応するクロススペクトル (の絶対値) が同一の値をとる．例えば，正三角形に配置したマイクロホンアレイの場合，雑音の相関行列は，

$$R_{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \tag{3}$$

となる．ここで，a, b は任意の (実数) パラメータである．以下，このような表現を，所与のマイクロホンアレイに対する「構造行列」と呼び，所与の構造行列に対し，同一パラメータを結合係数とする線形結合で表現したものを，構造行列の「対称分解」と呼ぶ．例えば，式 (3) で与えられる構造行列の対称分解は，

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

として，

$$R_{\boldsymbol{n}} = aB_1 + bB_2 \tag{5}$$

と表現される．また，B_1 や B_2 のような，被線形結合行列の組を,「対称分解の基底」と呼ぶ．

定理 1 所与の構造行列が，パラメータによらず定行列によって対角化できるための必要十分条件は，当該構造行列の対称分解の基底が同時対角化可能であることである．

証明　構造行列がパラメータによらず定行列によって対角化できるとすると，一つのパラメータのみを

*A Consideration on Blind Decorrelation of Isotropic Noise Field Based on Symmetric Decomposition of Covariance Matrix by Kazuki TANAKA, Akira TANAKA, Masaaki MIYAKOSHI (Hokkaido University), and Nobutaka ONO (University of Tokyo)

1，その他のパラメータを 0 として得られる行列の組 (すなわち対称分解の基底) は自明に同時対角化可能である．

一方，対称分解の基底が同時対角化可能であるとすると，その任意の線形結合も同時対角化可能である．従って，任意のパラメータに対する構造行列は，定行列で対角化される．(証明終)

定理 2 [4] $R_1, R_2, \ldots, R_N$ を n 次エルミート行列，R_1 は正則とする．この時，$T^* R_i T, i = 1, 2, \ldots, N$ が対角行列となる正則行列 T が存在するための必要十分条件は

(1) $\forall i,\ R_i R_1^{-1}$ が半単純で実固有値を持ち，

(2) $\forall i, j,\ R_i R_1^{-1} R_j = R_j R_1^{-1} R_i$ が成立する

ことである．

等方的雑音場に対する構造行列の対称分解の基底は自明に単位行列を含むこと，及び以上の二つの定理から以下の定理が導かれる．

定理 3 所与の構造行列が，パラメータによらず定行列によって対角化できるための必要十分条件は，当該構造行列の対称分解の基底の各要素が可換であることである．(証明略)

定理 3 より，アレイ配置に対応する構造行列が与えられた時に，その対称分解の基底の可換性を調べることにより，定行列で対角化できるかどうかを判別できることが明らかになった．このことは，ブラインド無相関化が可能なアレイ配置を (原理的には) 全て列挙できることを意味する．また，可換な対称行列はユニタリ行列で同時対角化できる [4] という事実から，構造行列を同時に対角化する定行列として，ユニタリ行列を選べることもわかる．

4 同時対角化行列の算出

本節では，所与の構造行列が定行列で対角化できるアレイ配置であると判明した場合に，実際に当該定行列を求めるアルゴリズム [5] を紹介する．

定行列で対角化可能であると判明している所与の構造行列の対称分解の基底を $B_1, \ldots, B_K \in \mathbf{R}^{n \times n}$ とする．但し，任意のユニタリ行列で自明に対角化できる単位行列は除外してあるものとする．今，B_1 のスペクトル分解を

$$B_1 = P_1 \Lambda_1 P_1^* \tag{6}$$

とすると，$P_1^* B_1 P_1 = \Lambda_1$ は自明に対角行列となる．もし，B_1 の固有値が重解を持たない場合，P_1 は (列の置換の任意性を除いて) 一意に定まるため，この P_1 が全ての B_k を同時対角化する定行列となる．一方，B_1 が重解の固有値を持つとすると，Λ_1 は，I_r を r 次の単位行列として，

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1^{(1)} I_{r_1^{(1)}} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_{N_1}^{(1)} I_{r_{N_1}^{(1)}} \end{bmatrix} \tag{7}$$

と書くことができる．ここで，N_1 は B_1 の相異なる固有値の個数，$r_k^{(1)}$ は固有値 $\lambda_k^{(1)}$ の重複度であり，$r_1^{(1)} + \cdots + r_{N_1}^{(1)} = n$ である．このとき，$D_2 = P_1^* B_2 P_1$ は，$H_k^{(2)}$ を何らかの $r_k^{(1)}$ 次のエルミート行列として

$$D_2 = \begin{bmatrix} H_1^{(2)} & & O \\ & \ddots & \\ O & & H_{N_1}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{8}$$

というブロック対角行列で表現できる．ここで，各 $H_k^{(2)}$ のスペクトル分解を

$$H_k^{(2)} = P_k^{(2)} \Lambda_k^{(2)} P_k^{(2)*} \tag{9}$$

とし，$P_k^{(2)}$ を対角に持つブロック対角のユニタリ行列を P_2 とすると，$P_2^* D_2 P_2 = P_2^* P_1^* B_2 P_1 P_2$ は対角行列となる．一方，式 (7) より，$P_2^* \Lambda_1 P_2 = P_2^* P_1^* B_1 P_1 P_2$ も自明に対角行列となるため，$(P_1 P_2)$ が B_1 と B_2 を同時に対角化する行列となる．各 $H_k^{(2)}$ が重解の固有値を持たない場合，P_2 は一意に決まるため，$(P_1 P_2)$ が全ての B_k を同時対角化する定行列となる．一方，$H_k^{(2)}$ が重解の固有値を持つ場合は，$(P_1 P_2)^* B_3 (P_1 P_2)$ に対して同様の操作を行なう．以下，全ての B_k に同じ議論を繰り返すことで，最終的に全ての B_k を同時に対角化する行列が得られる．ところで，このアルゴリズムで得られる同時対角化行列は，あくまで数値的なものであり，同時対角化を実現する定行列の解析的な表現が必要な場合には，先行研究 [1, 2, 3] のように，より理論的な解析が必要となることを付記しておく．

5 まとめ

本稿では，ブラインド無相関化が実現できるアレイ配置について理論的に解析することにより，当該アレイ配置が満たすべき必要十分条件を明らかにした．また，実際に構造行列のブラインド無相関化を実現するユニタリ行列を求める方法を紹介した．

参考文献

[1] H.Shimizu *et al.*, Proc. WASPAA, pp.54-57, 2007.

[2] N.Ito *et al.*, Proc. ICASSP, pp.317-320, 2008.

[3] 小野他, 音講論 (秋), pp.621-622, 2007.

[4] ラオ, ミトラ, “一般逆行列とその応用”, 東京図書, 1973.

[5] M. L. Mehta, “Matrix Theory - Selected Topics and Useful Results”, les editions de phisique, 1989.