

# 優ガウス音源に対する独立成分分析の二次補助関数に基づく学習則\*

小野順貴、宮部滋樹、嵯峨山茂樹 (東大院・情報理工)

## 1 はじめに

独立成分分析は、信号源の独立性の仮定に基づき、混合信号のみから原信号を推定する手法であり、ブラインド音源分離の有効な手法の1つとして現在も活発な研究が行われている。独立成分分析の基本的な解法としては、自然勾配法 [1] と FastICA [2, 3] が確立しているが、実時間での応用を考えた場合、反復演算にかかる計算負荷は未だ少なくない。

本研究で我々は、補助関数法という最適化の枠組みを独立成分分析に応用することにより、優ガウス性の信号源に対して、解を直交行列に制限せず、パラメータチューニング不要で収束性が保証される、新しい独立成分分析の学習則を導出した。本稿ではその原理、更新式とともに、収束速度の比較実験の結果を報告する。

## 2 独立成分分析の目的関数

観測により得られる多次元確率変数ベクトルを  $\mathbf{x} = (x_1 \cdots x_K)^t$  で表す。独立成分分析は一般に、 $\mathbf{y} = W\mathbf{x}$  のように信号を変換し、この各成分  $\mathbf{y} = (y_1 \cdots y_K)^t$  の独立性が最大となるような分離行列  $W = (w_1 \cdots w_K)^h$  を見つけることによって行われる。独立性の指標としては、非ガウス性、相互情報量、尤度などが用いられてきたが、いずれの場合も以下の形の目的関数の最小化問題に帰着することが知られている [4]。

$$J(W) = \sum_{k=1}^K E[G(\mathbf{w}_k^h \mathbf{x})] - \log |\det W| \quad (1)$$

ここで  $G(y)$  はコントラスト関数と呼ばれる非線形関数であり、信号源の確率密度関数  $p(y)$  が既知である場合には、 $G(y) = -\log p(y)$  と定めることにより、 $J$  の最小化は対数尤度最大化と等価となる。 $G(y)$  の非線形性により、一般に  $\partial J(W)/\partial W = 0$  を解析的に解くことはできず、反復解法が必要となる。

## 3 独立成分分析への補助関数法の適用

### 3.1 補助関数法の原理

補助関数法とは、非線形な目的関数  $f(\Theta)$  に対し、 $f(\Theta) = \min_{\tilde{\Theta}} \tilde{f}(\Theta, \tilde{\Theta})$  を満たすような、補助変数  $\tilde{\Theta}$  を含む補助関数  $\tilde{f}(\Theta, \tilde{\Theta})$  を設計し、

$$\Theta \leftarrow \arg \min_{\Theta} \tilde{f}(\Theta, \tilde{\Theta}) \quad (2)$$

$$\tilde{\Theta} \leftarrow \arg \min_{\tilde{\Theta}} \tilde{f}(\Theta, \tilde{\Theta}) \quad (3)$$

を交互に反復的に適用することにより  $f(\Theta)$  を単調減少させ、 $f(\Theta)$  を極小とするパラメータ  $\Theta$  を得る最適化手法である。式 (2)、式 (3) が解析的に求まる場合には効果的な反復解法が得られるが、そのような都合のよい補助関数  $\tilde{f}(\Theta, \tilde{\Theta})$  が見つかるかどうかは、目的関数  $f(\Theta)$  の具体的な形状に依存することに注意する必要がある。

### 3.2 コントラスト関数の二次補助関数

一般に二次関数は簡単に最小化できるため補助関数のよい候補であり、従来から補助関数としてよく用いられている [5-7]。我々はここでも、式 (1) の第1項に対して、 $w_k$  の二次形式の補助関数を設計することを試み、以下の定理を得た。

定理1 連続で微分可能な  $r$  の偶関数  $G(r)$  に対し、 $G'(r)/r$  が連続であり  $r > 0$  で単調減少であるならば、

$$G(r) \leq \frac{G'(r_0)}{2r_0} r^2 + \left( G(r_0) - \frac{r_0 G'(r_0)}{2} \right) \quad (4)$$

が任意の  $r$  について成り立ち、等号は  $r = \pm r_0$  のときにのみ成り立つ。

例えば、優ガウス性の信号源に対してよく用いられる下記のコントラスト関数 [4] は、定理1で必要としている条件を満たす。

$$G(r) = \log \cosh r \quad (5)$$

より一般的に、信号源の密度分布  $p(r)$  を用いてコントラスト関数を  $G(r) = -\log p(r)$  とする場合にも、[8] (pp. 60-61) によれば、 $p(r)$  が優ガウス性で  $G'(r)/r$  が原点で連続であれば、定理1で必要とされる条件が満たされる。定理1で  $r = |\mathbf{w}_k^h \mathbf{x}|$  とし式 (1) に適用すると、補助関数が定理2のように導かれる。

### 定理2

$$Q(W, \tilde{W}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \mathbf{w}_k^h V_k \mathbf{w}_k - \log |\det W| + R \quad (6)$$

を考える。ただし、 $R$  は  $W$  に依存しない定数、また  $\tilde{W} = (\tilde{w}_1 \cdots \tilde{w}_K)^h$ 、 $r_k = |\tilde{w}_k^h \mathbf{x}|$  に対し、

$$V_k = E \left[ \frac{G'(r_k)}{r_k} \mathbf{x} \mathbf{x}^h \right] \quad (7)$$

である。このとき

$$J(W) \leq Q(W, \tilde{W}) \quad (8)$$

が任意の  $W$  について成り立ち、等号は  $1 \leq k \leq K$  に対して  $\tilde{w}_k = w_k e^{j\phi_k}$  のときにのみ成り立つ。ただし、 $\phi_k$  は任意の位相を表す。

## 4 学習則の導出

### 4.1 補助関数の微分

3.1 節で述べた補助関数法の原理に基づき、 $Q(W, \tilde{W})$  を  $W$  と  $\tilde{W}$  に関して交互に最小化することにより、目的関数  $J(W)$  は単調減少する。定理2より、 $\tilde{W}$  に関する  $Q$  の最小化は  $\tilde{W} = W$  とするだけでよい。 $W$  に関して  $Q$  を最小化するために、 $\partial Q(W, \tilde{W})/\partial \mathbf{w}_k^* = 0$  を求めると、

\*A Learning Rule of Independent Component Analysis for Super-Gaussian Sources Based on Quadratic Auxiliary Functions by Nobutaka ONO, Shigeki MIYABE and Shigeki SAGAYAMA (The University of Tokyo)

$$w_l^h \frac{\partial}{\partial w_k^*} \log |\det W| = \delta_{lk} \quad (9)$$

に注意すれば ( $\delta_{lk}$  はクロネッカーのデルタ),  $W$  の各行ベクトル  $w_k$  の  $K^2$  個の連立方程式を得る。

$$w_l^h V_k w_k = \delta_{lk} \quad (10)$$

ただし,  $1 \leq l \leq K, 1 \leq k \leq K$  である。 $W$  の要素数も  $K^2$  個であるから式 (10) は解けそうであるが, いまのところ閉形式の解は  $K = 2$  の場合しか求まっていない。そこで,  $K$  個の  $w_k$  を一度に更新する代わりに, 1 つずつ更新していく解法 (Auxiliary function based Independent Component Analysis 1; 以下 AuxICA1) と 2 つずつ対にして更新していく解法 (以下 AuxICA2) を提案する。導出は紙面の制約上省略し, 更新式のみを以下に示す。

#### 4.2 AuxICA1

$1 \leq k \leq K$  の各  $k$  に対して, 以下の更新を逐次的に行う。ただし,  $r_k = |w_k^h x|$  である。

$$V_k = E \left[ \frac{G'(r_k)}{r_k} x x^h \right] \quad (11)$$

$$P = V_k (w_1 \cdots w_{k-1} w_{k+1} \cdots w_K) \quad (12)$$

$$w_k \leftarrow w_k - P(P^h P)^{-1} P^h w_k \quad (13)$$

$$w_k \leftarrow w_k / \sqrt{w_k^h V_k w_k} \quad (14)$$

#### 4.3 AuxICA2

$1 \leq m < n \leq K$  の各  $m, n$  の対に対して, 以下の更新を逐次的に行う。ただし,  $u_m = w_m^h x, u_n = w_n^h x, r_m = |u_m|, r_n = |u_n|, u = (u_m u_n)^t$  である。

$$V_m = E \left[ \frac{G'(r_m)}{r_m} u u^h \right], V_n = E \left[ \frac{G'(r_n)}{r_n} u u^h \right] \quad (15)$$

に対して, 一般化固有値問題  $V_m h = \gamma V_n h$  の 2 解  $h_m, h_n$  を求め, 以下を行う。

$$h_m \leftarrow h_m / \sqrt{h_m^h V_m h_m} \quad (16)$$

$$h_n \leftarrow h_n / \sqrt{h_n^h V_n h_n} \quad (17)$$

$$(w_m w_n) \leftarrow (w_m w_n) (h_m h_n) \quad (18)$$

### 5 収束速度の比較実験

AuxICA1, AuxICA2 の収束速度と安定性を, 既存手法である自然勾配法 (ステップサイズ 0.05, 0.1, 0.2), FastICA と比較する実験を行った。1) 定常な信号, 2) 非定常な信号, 3) 大きな外れ値をもつ信号を模擬することを意図し, 位相は一様分布, 振幅はそれぞれ下記の確率密度関数に独立に従う 3 種類の人工的な複素数値信号源を用いた。

$$p_1(r) = e^{-r} \quad (19)$$

$$p_2(r) = \frac{3}{4} \delta(r) + \frac{1}{4} e^{-r} \quad (20)$$

$$p_3(r) = \begin{cases} \frac{\arctan 1000}{\pi(1+r^2)} & (0 \leq r \leq 1000) \\ 0 & (r > 1000) \end{cases} \quad (21)$$

各信号源において, 信号源数を  $K = 2, 6$  とした 6 条件で, 瞬時混合により 1000 サンプルの観測信号を生成し, これを白色化した後に各手法を適用した。混

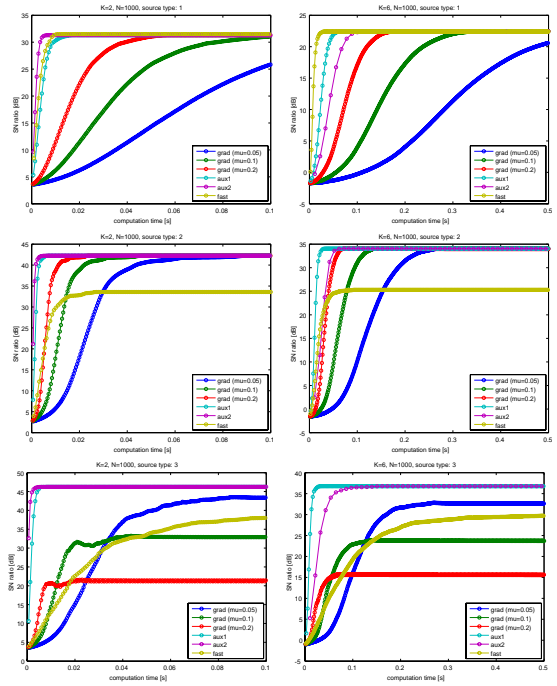


Fig. 1 収束速度の比較。信号源数左が 2, 右が 6, 信号源タイプは上から 1, 2, 3 (詳細は本文参照)

合行列は, 各要素を平均 0, 分散 1 の複素ガウス分布に従う乱数により生成した。いずれの手法においてもコントラスト関数は式 (5) を用いた。反復的に推定される分離行列の計算時間と, それによって得られる分離信号の SN 比を 100 試行で平均し, それぞれ縦軸横軸としてグラフ化したものを図 1 に示す。なお SN 比は Projection Back による定数倍推定に正解パーミュテーションを与えることで求めている。計算は 2.66GHz の CPU をもつノート PC 上の Matlab で行った。1) 勾配法ではステップサイズが大きいほど収束が速いが, 解が発散しやすく平均分離性能が低下する (信号タイプ 3 の結果参照), 2) FastICA は定常信号に対する収束は大変速いが, 非定常な信号に対しては分離性能が低下することがある (有限長観測における独立成分同士が無相関とは必ずしも限らないため), といった従来法の特徴に加え, 3) AuxICA1, AuxICA2 は信号に抛らず発散することがなく, 収束時の平均分離性能が高い, 4) AuxICA1, AuxICA2 の収束速度は, 信号源数 2 の場合には AuxICA2 が, 信号源数 6 の場合には AuxICA1 が速いが, いずれも勾配法よりは速く, FastICA と同程度 (条件によってはより速い) といった提案法の特長が確認できる。今後, 実際のブランド音源分離に応用していく予定である。

### 参考文献

- [1] S. Amari, Neural Computation, vol. 10, no. 2, pp. 251–276, 1998.
- [2] Hyvärinen, IEEE Trans. NN, vol. 10, no. 3, pp. 626–634, 1999.
- [3] Bingham *et al.*, International Journal of Neural Systems, vol. 10, no. 1, pp. 1–8, Feb. 2000.
- [4] Hyvärinen *et al.*: Independent Component Analysis, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [5] Kameoka *et al.*, Proc. ICASSP, pp.29–32, 2008.
- [6] Ono *et al.*, Proc. EUSIPCO, Aug., 2008.
- [7] Ono *et al.*, Proc. WASPAA, pp.161–164, Oct., 2009.
- [8] Benveniste *et al.*: Adaptive algorithms and stochastic approximations, Springer-Verlag, 1990.