等方的雑音場直交化のためのアレイ配置に関する群論的検討*

○小野 順貴，河野 仁 (東大工)，清水 光，伊藤 信貴，嵯峨山 茂樹 (東大院・情報理工)

1　はじめに

我々は，カクテルパーティ，雑踏などの多数話者による背景雑音や室内の残響等，拡散性の雑音を抑圧するための新しいアレイ信号処理として，等方性雑音の共分散行列の構造に着目した手法の研究を進めている [1][2][3]。この手法の鍵は，結晶構造のような，ある対称性の高いアレイ配置を用いることによって，等方性雑音の共分散行列を非観測のまま対角化する点にある。本報告では，この手法を適用可能なアレイ配置を明確化するために，等方性雑音共分散行列の直交化とアレイ配置の関係について論じる。

2　等方的雑音場の共分散行列

観測点の周囲に多数の独立な雑音源が存在する雑音場の理想的なモデルとして，

1) 雑音パワースペクトルが観測位置に依らない
2) 雑音の空間的クロススペクトルが 2 点の観測位置の方向に依らない

という性質を満たす等方性雑音場を考える。いま，マイクロホンアレイによりこの雑音場を観測して得られる周波数領域での雑音ベクトルを $\boldsymbol{N}$，その共分散行列を $V = E[\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^h]$ とする。ただし ^{h} はエルミート転置であり，またこれらは角周波数 ω に依存するが，簡単のため，以下では ω は省いて表記する。上記 1) の仮定より，V の対角成分は等しい値をとり，また 2) の仮定より，アレイが距離の等しいマイクロホン対を複数含めば，それらに対応する非対角成分は等しい値をとる。例えば正方形アレイに対し，周を回る順にマイクロホンに番号をつければ，V は

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

と表される。

α_i $(i = 1, 2, 3)$ は周波数に依存するが，これらの値に依存せず，この V は 4 次の DFT 行列 Z_4 により対角化される。ここで N 次の DFT 行列 Z_N は，以下のように定義されるものとする。

$$Z_N = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \cdots & \zeta^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{N-1} & \cdots & \zeta^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\zeta = e^{-j2\pi/N}. \tag{3}$$

このように，パラメータに依らず定行列で対角化される雑音共分散行列とアレイ配置の関係を，より明らかにすることが本稿の目的である。

3　共分散行列の構造とアレイ配置の対称性

3.1　共分散行列が満たすべき必要条件

$n \times n$ の対称行列 V は，一般には $n(n+1)/2$ 個の自由度をもつが，アレイが距離の等しいマイクロホン対を複数含めば，その自由度はより小さくなる。いま，V の自由度が m，すなわち，各成分は独立な m 個のパラメータ $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ のいずれかの値をとるものとする。このとき，以下の定理が成り立つ。

定理 1 対称行列 V がパラメータ α_i $(i = 1, \cdots m)$ に依存せず，定行列 P により対角化されるための必要条件は，全ての行ベクトル，全ての列ベクトルが，重複度を含めて，同じパラメータを含むことである。

証明： V がパラメータ $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ に依らず，ある定行列 P により対角化可能だとすると，全パラメータに 1 を代入した行列，すなわち全成分が 1 である行列 I_n(単位行列ではないことに注意) も P により対角化される。このとき，V と I_n は可換なので，

$$VI_n = I_nV \tag{4}$$

を得る。左辺には V の各行の和，右辺には V の各列の和が現れるが，V は対称行列であるから，これらはどちらも i 行目の和 $s_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij}$ により，

$$\begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & \ldots & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & \ldots & s_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

のように表される。従って任意の $1 \le i \le n$ について $s_1 = s_i$ がパラメータの値に依らず成り立たなければならない。つまり V の行ベクトル，もしくは列ベクトルは，重複度も含めて，同じパラメータでを含まなければならない。 ■

3.2　共分散行列のパーミュテーション分解

前節で述べた必要条件を満たす行列 V のパラメータの自由度 m は一般に $m \le n$ となるが，いま，重複するパラメータを適当に区別し，n 個のパラメータ $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ により V を表すことを考える。このとき，以下の定理が成り立つ。

定理 2 V が互いに可換なパーミュテーション行列 Q_i により，

$$V = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q_i \tag{6}$$

と分解されるならば，V はパラメータ α_i に依らず，ある定行列 P で対角化される。

---

*A Group-theoretical Consideration on Array Arrangements to Orthogonalize Isotropic Noise Field by Nobutaka ONO, Hitoshi KOHNO, Hikaru SHIMIZU, Nobutaka ITOU and Shigeki SAGAYAMA (The University of Tokyo)

証明： Q_i が互いに可換なので，これらは同じ定行列 P により対角化される。よって V も α_i に依らず，P により対角化される。 ■

例えば，式 (1) は，

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

のように表すことができ (ただし $\alpha_4 = \alpha_2$),

$$\boldsymbol{V} = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \alpha_3 Q_3 + \alpha_4 Q_4 \tag{8}$$

のように分解できる。ただし Q_i は，式 (7) において，α_i を 1 で，$\alpha_j (j \neq i)$ を 0 で置き換えた行列である。

定理 2 は十分条件であり，必要性は未だ定かではないが，もしこのようなパーミュテーション分解ができるとすると，Q_i は以下の性質をもつ。

- Q_i の働きをアレイの素子間の置換とみなすと，この置換はアレイ配置を不変に保つ。(Q の置換により，共分散行列は $V' = E[(Q\boldsymbol{N})(Q\boldsymbol{N})^h] = QVQ^{-1}$ と表わされるが，Q と V は可換なので，$V' = V$ がパラメータによらず成り立つため。)
- 一般性を失わず，素子 1 を素子 i に移す置換を Q_i と定めることができる。このとき，$Q_1 = E$(単位行列) であり，その他の $Q_i (i \neq 1)$ は対角成分に 1 をもたないため，不動点をもたない置換を表わす。

逆に n 個のアレイ配置に対して，アレイ配置を不変に保つ n 個の置換が存在し，それらが，1) それぞれ素子 1 を素子 $i (i = 1, 2, \cdots, n)$ に移す置換であり，2) 恒等変換以外は不動点を持たず，3) 互いに可換である，ならば，それらの置換を表わす行列 Q_i は，等方的雑音共分散行列をパーミュテーション分解する候補となりうる。

この議論はまだ必要十分性には至っていないが，共分散行列の定行列対角化可能性とアレイ配置の対称性の直接的な関係を表わしている。また一般に，点の配置を不変に保つ回転，反転などの置換操作は群をなすことが知られている [4]。上記パーミュテーション分解を行う行列 Q_i も群をなすものと考えられ，この議論は，アレイ配置を不変に保つ置換群が，アレイ個数 n の位数をもつ可換な部分群をもつかどうか，という議論に帰着することを予想している。

3.3　アレイ配置と置換群

我々は前報告で，等方的雑音場を直交化するアレイ配置として，正多角形，長方形，正多面体，直方体，正多角柱 (Fig. 1 参照) を示した [1]。実際，これらの配置のほとんどが，前節で述べたパーミュテーション分解に対応する可換な置換群をもつ。紙面の都合上，結果だけを示す。

1) 正 n 角形 $2\pi/n$ の回転 R とそのべき乗

2) 長方形 対向する辺を入れ替える反転 T_1，T_2 とそれらの積

3) 直方体 対向する面を入れ替える反転 T_1，T_2，T_3 とそれらの積

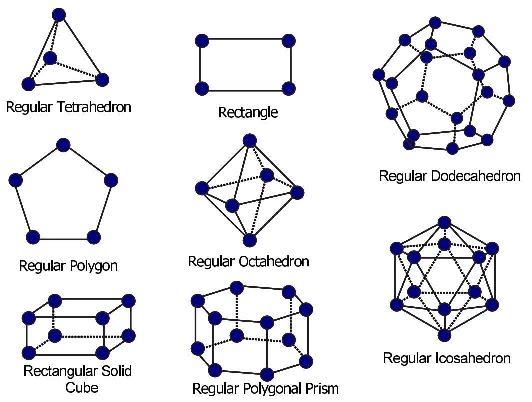

Fig. 1　等方的雑音場を直交化するアレイ配置

4) 正四面体 長方形と同型

5) 正 n 角柱・正六面体・正八面体 対向する二面に平行な $2\pi/n$ の回転 R (正六面体は $n = 4$，正八面体は $n = 3$)，対向する二面を入れ替える反転 T とそれらの積 (R のべき乗を含む)

正二十面体に対応する共分散行列：

$$V = \begin{pmatrix} C(\alpha_1,\alpha_2) & C(\alpha_3,\alpha_2) & C(\alpha_2,\alpha_3) & C(\alpha_4,\alpha_3) \\ C(\alpha_3,\alpha_2) & C(\alpha_1,\alpha_3) & C(\alpha_4,\alpha_2) & C(\alpha_2,\alpha_3) \\ C(\alpha_2,\alpha_3) & C(\alpha_4,\alpha_2) & C(\alpha_1,\alpha_3) & C(\alpha_3,\alpha_2) \\ C(\alpha_4,\alpha_3) & C(\alpha_2,\alpha_3) & C(\alpha_3,\alpha_2) & C(\alpha_1,\alpha_2) \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$C(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} \tag{10}$$

に対しては，まだこのような置換群が得られていないが，我々は別の考察から，これを対角化する下記の行列をすでに得ている (正十二面体も同様。) 今後，本稿の議論を深めつつ，等方的雑音抑圧への応用を進めていく予定である。

$$P = \begin{pmatrix} Z_3 & Z_3 & Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & -Z_3 & -Z_3 R_+ & -Z_3 R_- \\ Z_3 & -Z_3 & Z_3 R_+ & Z_3 R_- \\ Z_3 & Z_3 & -Z_3 & -Z_3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$R_+ = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \quad R_- = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \tag{12}$$

(diag() は，() 内を対角成分にもつ対角行列を表す。)

謝辞　本研究を進めるにあたり，北海道大学の田中章先生，東京大学の室田一雄先生に有益なご議論をいただいたので，ここに謝意を表する。

参考文献

[1] 清水他，音講論 (春), pp.569-570, 3 月, 2007.
[2] H. Shimizu *et al.*, Proc. WASPAA2007, Oct. 2007. (acceppted)
[3] 伊藤他，音講論 (秋), 9 月, 2007.
[4] 犬井，田辺，小野寺，応用群論，裳華房，1980.