



東京大学 工学部 計数工学科 システム情報工学演習第二
2006.11.08

フーリエ解析・信号処理

嵯峨山 茂樹

東京大学 工学部 計数工学科

<sagayama@hil.t.u-tokyo.ac.jp>

<http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~sagayama/enshu2/FourierTrans2006nov.pdf>



演習問題1: 奇関数、偶関数、フーリエ展開

11/15までに以下の問題を解いて嵯峨山あて(ポストあるいは秘書)に提出のこと。
なお、図の作成には **gnuplot** などのソフトウェアを用いても良い。また、 x_i は $x[i]$ と表記しても良い。

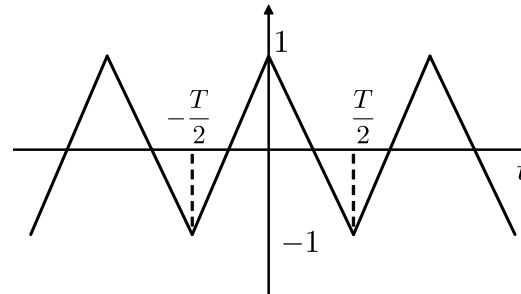
- (1) $x(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t \leq 0 \\ t, & 0 < t < \pi \end{cases}$ を偶関数と奇関数との和で表しなさい。
- (2) 上記の関数の偶関数の $\cos$ 級数展開を求めなさい。
- (3) 上記の関数の奇関数の $\sin$ 級数展開を求めなさい。
- (4) 上記の関数の指数 **Fourier** 級数展開を別途求め、上記2問の結果との関係を論じなさい。



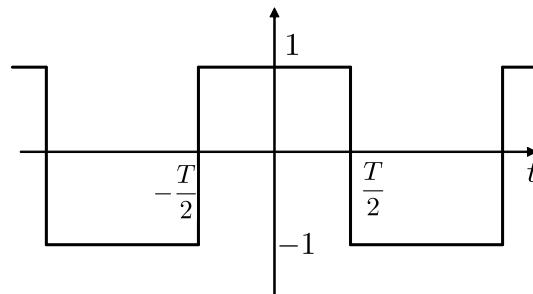
演習問題2: Fourier展開

11/15までに以下の問題を解いて嵯峨山あて(ポストあるいは秘書)に提出のこと。
なお、図の作成には `gnuplot` などのソフトウェアを用いても良い。また、 x_i は $x[i]$ と表記しても良い。

(1) 次の信号をフーリエ級数展開しなさい:



(2) 次の信号をフーリエ級数展開しなさい:



(3) 上記の2つの問題の間の関係を論じなさい。(1)の解答から(2)の解答を導くにはどうすれば良いか。



演習問題3: Fourier 変換

11/15までに以下の問題を解いて嵯峨山あて(ポストあるいは秘書)に提出のこと。
なお、図の作成には gnuplot などのソフトウェアを用いても良い。また、 x_i は $x[i]$ と表記しても良い。

次のフーリエ変換対が成立することを示せ。

(1) $\delta(t) \leftrightarrow 1$

(2) $U(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

(3) $e^{-at^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$

(4) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T}n)$



演習問題4: サンプルホールドと直線補間

11/15までに以下の問題を解いて嵯峨山あて(ポストあるいは秘書)に提出のこと。
なお、図の作成には `gnuplot` などのソフトウェアを用いても良い。また、 x_i は $x[i]$ と表記しても良い。

- (1) 任意の連続信号 $x(t)$ (t は時刻) に対して、サンプリング定理を満たすような周期 T でサンプリングして、サンプル値列 $\{x_i\}$ を得た。ホールドにより信号 $x_H(t)$ を、直線補間により信号 $x_L(t)$ を得た。
- (2) これらの操作は、いずれもサンプル値列(デルタ関数列)と、ある線形フィルタ(インパルス応答 $h_H(t)$ および $h_L(t)$) との畳み込みとみなせる。 $h_L(t)$ はどのような形状か。式および図で答えなさい。
- (3) 元の信号 $x(t)$ に対して形状が必ずしも一致しないため、複素スペクトル $X(\omega)$ にも偏差が生じる。その偏差を、振幅と位相に分けて、式と図で答えなさい。



演習問題5: 離散系の畳み込み

11/15までに以下の問題を解いて嵯峨山あて(ポストあるいは秘書)に提出のこと。なお、図の作成には **gnuplot** などのソフトウェアを用いても良い。また、一般に x_i は $x[i]$ と表記しても良い。

- (1) 任意の連続信号 $x(t), y(t)$ (t は時刻) を周期 T でサンプリングしてサンプル値列を $\{x_i\}$ および $\{y_i\}$ とし、それらの畳み込みを z_i とする。それが、連続信号の畳み込み $z(t) = x(t) * y(t)$ を周期 T でサンプリングしたものと一致するための条件は何か答えなさい。できるだけ図も併用して、その信号としての意味を論じる方が望ましい。
- (2) $x(t)$ と $y(t)$ の相互相関関数について同様の考察をなさい。
- (3) Parseval の定理についても同様の考察をなさい。



信号空間と直交関数系

- 信号解析、信号空間
- 直交展開、直交関数系、関数の最良近似
- 二値直交関数系 (Rademacher, Haar, Walsh)
- Gram-Schmidt の直交化



* 信号解析

信号とは?

■ 情報としての[時間の][連続値を取る]関数
(「信号 (signal)」 $\leftrightarrow$ 「記号 (symbol)」)

■ 信号の例

- 音声信号: $x(t)$
- 画像信号: $I(x, y)$
- 映像信号: $I(x, y, t)$



* 2次元ベクトル

ベクトルの概念と基本事項 (2次元)

■ 幾何学的意味: (右図)

■ ベクトルの成分表示: $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$

■ ベクトルの線形独立性: $\mathbf{x} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}$

■ ベクトル空間 (線形空間)

■ ベクトルのノルム: $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \geq 0$

■ ベクトル間の (Euclid) 距離:

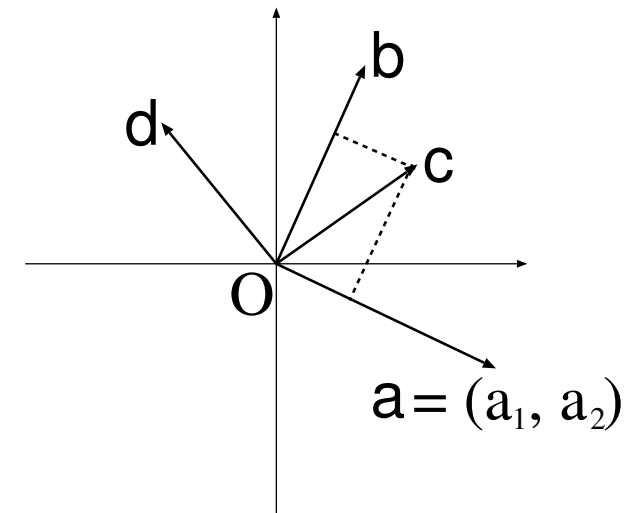
$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

■ ベクトルの内積: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \cos \theta$

■ ベクトルの直交: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, i.e., $(\theta = \pm\pi/2)$

■ ベクトルの射影 ($\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は直交):

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\mathbf{a} + \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})}\mathbf{b}$$





* n 次元ベクトル空間

■ ベクトル: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

■ ベクトルの線形独立性: $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}$

■ ベクトル空間 (線形空間)

■ ベクトルのノルム: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \geq 0$

■ ベクトル間の (Euclid) 距離: $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2}$

■ ベクトルの内積: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

■ ベクトルの直交: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, i.e., $(\theta = \pm\pi/2)$

■ ベクトルの射影 ($\mathbf{v}_i$ は直交ベクトル基底):

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i$$



* 正規直交ベクトル空間

- 正規直交基底ベクトル $\{\mathbf{u}_i\}$: $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
- 任意のベクトル $\mathbf{x}$ は、 $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$ と表せる。
- 部分和 (m 個, $m < n$) での最良近似

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{u}_i + \varepsilon$$

とすると誤差のノルム $\|\varepsilon\|^2$ が最小になる条件は、

$$c_i = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|^2}$$



* 離散信号空間 – 信号をベクトルと捉える

信号空間の直観的な理解

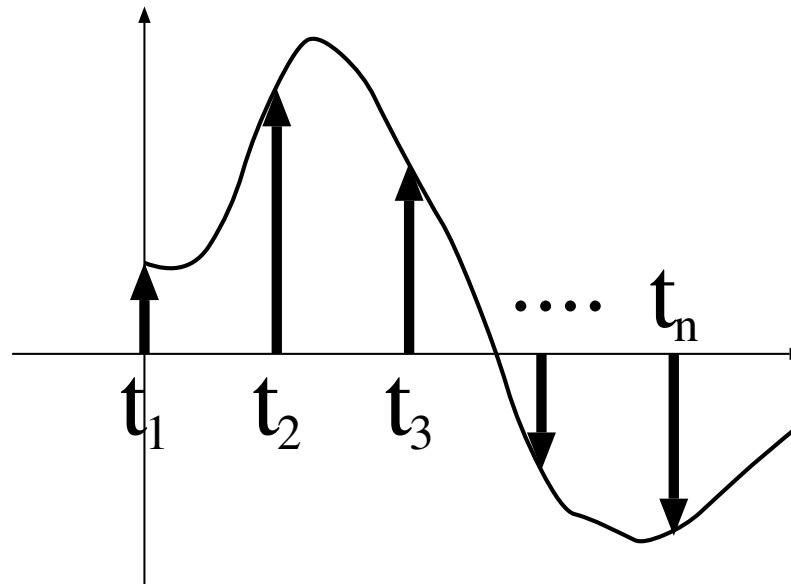
■ 時刻 $t_1, t_2, \dots, t_n$ における信号 $x(t)$ の値の系列

$$\mathbf{x} = \{x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_n)\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

を n 次元ベクトル

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

と捉える。





* 離散信号空間の性質

■ 線形独立性

■ ベクトル空間 (線形空間)

■ 信号サンプル値系列ベクトル間の内積:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x(t_1)y(t_1) + x(t_2)y(t_2) + \cdots + x(t_n)y(t_n) = \sum_{i=1}^n x(t_i)y(t_i)$$

■ ベクトルの射影 ($\mathbf{u}_i$ は直交ベクトル基底):

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i)}{(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)} \mathbf{u}_i$$

誤差最小の近似 (加算ベクトルの数が次元数より少ない場合)

■ 信号サンプル値系列ベクトル間の距離:

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (x(t_i) - y(t_i))^2$$



* 連続信号空間

連続信号の場合 (Cf. Riemann 積分)

■ 線形独立

■ 信号空間 (無限次元) — Hilbert 空間

■ 信号間の内積:

$$(x(t), y(t)) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt$$

Cf. 重みつき内積 (重み $f(t) > 0$)

$$\begin{aligned}(x(t), y(t)) &= \int_{t_1}^{t_2} x(t) y(t) f(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} x(t) y(t) dF(t) \quad (\text{Stieltjes 積分})\end{aligned}$$

■ 信号間のユークリッド距離:

$$d^2(x(t), y(t)) = \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - y(t))^2 dt$$



* 連続信号の直交展開

■ 信号の直交展開 ($u_i(t)$ は直交基底):

$$x(t) \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{(x(t), u_i(t))}{(u_i(t), u_i(t))} u_i(t)$$

誤差最小の近似 (加算ベクトルの数が次元数より少ない場合)
任意の関数が展開可能なら、 $\{u_i(t)\}$ は完全 (complete, 完備) 系。

■ Cf. Hilbert 空間

- David Hilbert: 無限次元 Euclid 空間 (1990)。
- F. Riesz: L_2 空間。
- J. von Neumann: 公理的。



* 直交関数系 1/2

(岩波数学辞典第2版から)

- 直交: 区間 (a, b) で L_2 に属する複素関数値関数 $f(x), g(x)$ に対して、内積 $(f, g) = \int_a^b f(x)g(\bar{x})dx$ 、ノルム $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ を定義する。 $(f, g) = 0$ のとき、 f, g はこの区間で直交するという。(積分は Lebesgue 積分とする。)
- 正規直交: $\|f\| = 1$ のとき、 f は正規化されているという。
- 直交関数系 $\{f_i(x)\}$: 区間 (a, b) で定義された関数系 $\{f_n(x)\}$ のどの2つの関数も互いに直交しているとき、この系を直交系(orthogonal system)といい、 $\{f_n\} \in \mathbf{O}(a, b)$ と書く。
- 正規直交関数系: 特にすべての $f_n(x)$ が正規化されているとき正規直交系(orthonormal system, 略して ON系)といい、 $\{f_n\} \in \mathbf{ON}(a, b)$ と書く。



* 直交関数系 2/2

(岩波数学辞典第2版から)

- 閉じた直交関数系: 一般に、 R を区間 (a, b) の上の関数の族でノルムが定義されているものとし、 $\{f_n\}$ が (a, b) の上の関数の一次独立な系であって、 R の任意の関数が $\{f_n\}$ の中の有限個の関数の一次結合でノルムの意味で任意に近似できるとき $\{f_n\}$ は閉じている (closed) という。
- 完備な正規直交関数系: また、 R が (a, b) の上の L_2 に属する関数の或る族で $\{f_n\} \in \mathbf{O}(a, b)$ のとき、すべての n について $(\varphi, f_n) = 0$ なる $\varphi(x) \in R$ はほとんど至るところ 0 であるならば直交系 $\{f_n\}$ は R において完備 (complete) であるという。(この R ではじめに述べた L_2 のノルムを考えた場合は、直交系 $\{f_n\}$ が閉じていることと完備であることは同等である。)



* 関数の最良近似 1/2

■ 関数 $f(t)$ を直交関数基底 $v_i(t)$ の線形結合として近似できるか？

$$f(t) = c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t) + \cdots + c_N v_N(t) + e(t) = \sum_{n=1}^N c_n v_n(t) + e(t)$$

■ 近似誤差関数のノルムは

$$\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ f(t) - \sum_{n=1}^N c_n v_n(t) \right\}^2 dt$$

関数 $\{v_i\}$ は互いに直交しているから

$$\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - 2 \sum_{i=1}^N c_i \int_{t_1}^{t_2} f(t) v_i(t) dt + \sum_{i=1}^N c_i^2 \int_{t_1}^{t_2} v_i^2(t) dt$$



* 関数の最良近似 2/2

- 近似誤差関数のノルム ε を最小にするような係数 $\{c_i\}$ は?

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_i} = -2 \int_{t_1}^{t_2} f(t) v_i(t) dt + 2c_i \int_{t_1}^{t_2} v_i^2(t) dt = 0$$

と置いて

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) v_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} v_i^2(t) dt} = \frac{(f, v_i)}{(v_i, v_i)}$$

- 近似誤差のノルム $\varepsilon \geq 0$ の最小値は?

$$\min \varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{i=1}^N c_i^2 \int_{t_1}^{t_2} v_i^2(t) dt \geq 0$$

Bessel の不等式

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt \geq \sum_{i=1}^N c_i^2 \int_{t_1}^{t_2} v_i^2(t) dt$$

- $\{v_i\}$ が完全ならば、 $N \rightarrow \infty$ で等号が成り立ち、**Parseval の等式**

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \int_{t_1}^{t_2} v_i^2(t) dt$$

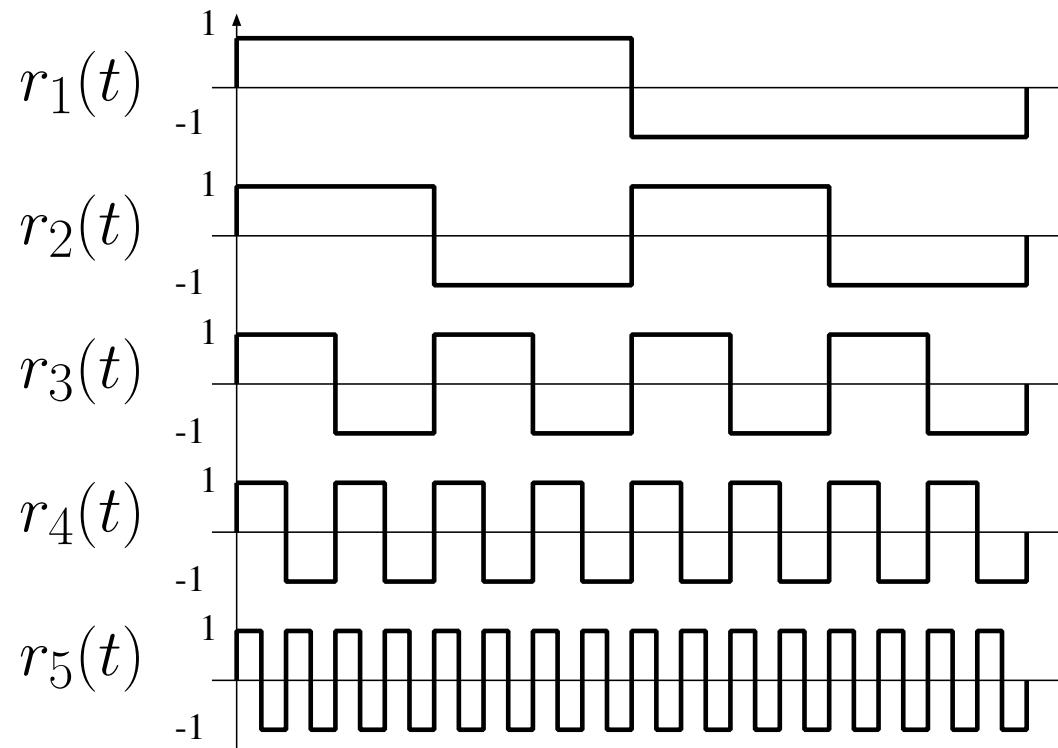


* 二値直交関数系: Rademacher 関数系 (1922)

■ **Hans Rademacher** (Born: 3 April 1892 in Wandsbeck, Schleswig-Holstein, Germany;
Died: 7 Feb 1969 in Haverford, Pennsylvania, USA)

■ **Rademacher 関数系 (1922):** 区間 $(0, 1)$ で直交関数系 – 完全ではない

$$r_n(t) = \mathbf{sign}(\sin 2^n \pi x), \quad \mathbf{sign}(t) = \begin{cases} +1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$





* 二値直交関数系: Haar 関数系 (1910)

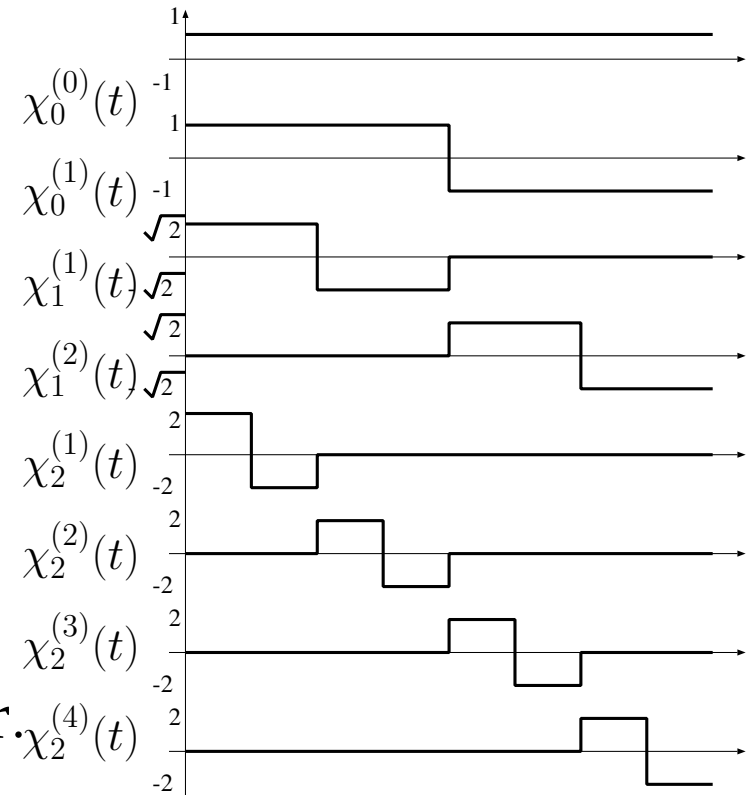
■ **Alfréd Haar** (Born: 11 Oct 1885 in Budapest, Hungary; Died: 16 March 1933 in Szeged, Hungary)

■ **Haar 関数系 (1910):** 区間 $(0, 1)$ で直交関数系

$$\chi_0^{(0)}(t) = 1,$$

$$\chi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & \frac{k-1}{2^n} < t < \frac{k-1/2}{2^n} \\ -\sqrt{2^n}, & \frac{k-1/2}{2^n} < t < \frac{k}{2^n} \\ 0, & \frac{l-1}{2^n} < t < \frac{l}{2^n}, \\ & l \neq k, 1 \leq l \leq 2^n \end{cases}$$

$$1 \leq k \leq 2^n, \quad n \geq 0, \text{ integer.}$$



■ **最も早く発表された方形波形の直交関数系**



* 二値直交関数系: Walsh 関数系 (1923)

■ Walsh 関数系 (1923): 区間 $(0, 1)$ で完全直交関数系

Paley (1932) による定義: $(r_k(t))$ は Rademacher 関数)

$$n = \sum_{k=0}^{m-1} n_k \cdot 2^k \quad (n \text{ の 2 進数表示})$$

$$w_n(t) = \prod_{k=0}^{m-1} (r_{k+1}(t))^{n_k}$$

さまざまな順序定義: Walsh 順序、Paley 順序、Hadamard 順序

$$w_0(t) = \mathbf{wal}(0, t) = \mathbf{cal}(0, t)$$

$$w_1(t) = \mathbf{wal}(1, t) = \mathbf{sal}(1, t)$$

$$w_2(t) = \mathbf{wal}(3, t) = \mathbf{sal}(2, t)$$

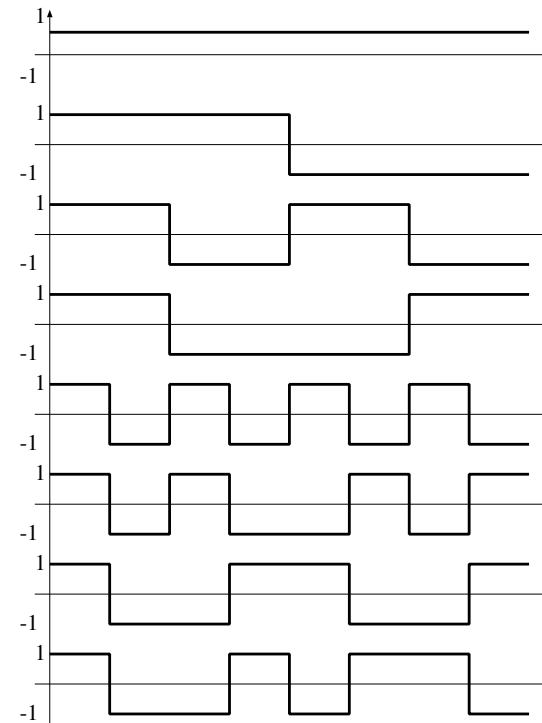
$$w_3(t) = \mathbf{wal}(2, t) = \mathbf{cal}(1, t)$$

$$w_4(t) = \mathbf{wal}(7, t) = \mathbf{sal}(4, t)$$

$$w_5(t) = \mathbf{wal}(6, t) = \mathbf{cal}(3, t)$$

$$w_6(t) = \mathbf{wal}(4, t) = \mathbf{cal}(2, t)$$

$$w_7(t) = \mathbf{wal}(5, t) = \mathbf{sal}(3, t)$$





* Gram-Schmidt の直交化法

■ 一次独立な関数系 $\{f_i(x)\}$ から、正規直交系 $\{\phi_i(x)\}$ を作る手順。

$$\phi_1(x) = \psi_1(x)/\|\psi_1(x)\|, \quad \psi_1(x) = f_1(x)$$

$$\phi_2(x) = \psi_2(x)/\|\psi_2(x)\|, \quad \psi_2(x) = f_2(x) - (f_2, \phi_1)\phi_1(x)$$

$$\phi_3(x) = \psi_3(x)/\|\psi_3(x)\|, \quad \psi_3(x) = f_3(x) - (f_3, \phi_1)\phi_1(x)$$

$$\dots\dots\dots - (f_3, \phi_2)\phi_2(x)$$

$$\phi_n(x) = \psi_n(x)/\|\psi_n(x)\|, \quad \psi_n(x) = f_n(x) - \sum_{i=1}^{n-1} (f_n, \phi_i)\phi_i(x)$$

■ 冪関数列 $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$ から Gram-Schmidt の直交化法で直交関数系を構成する。

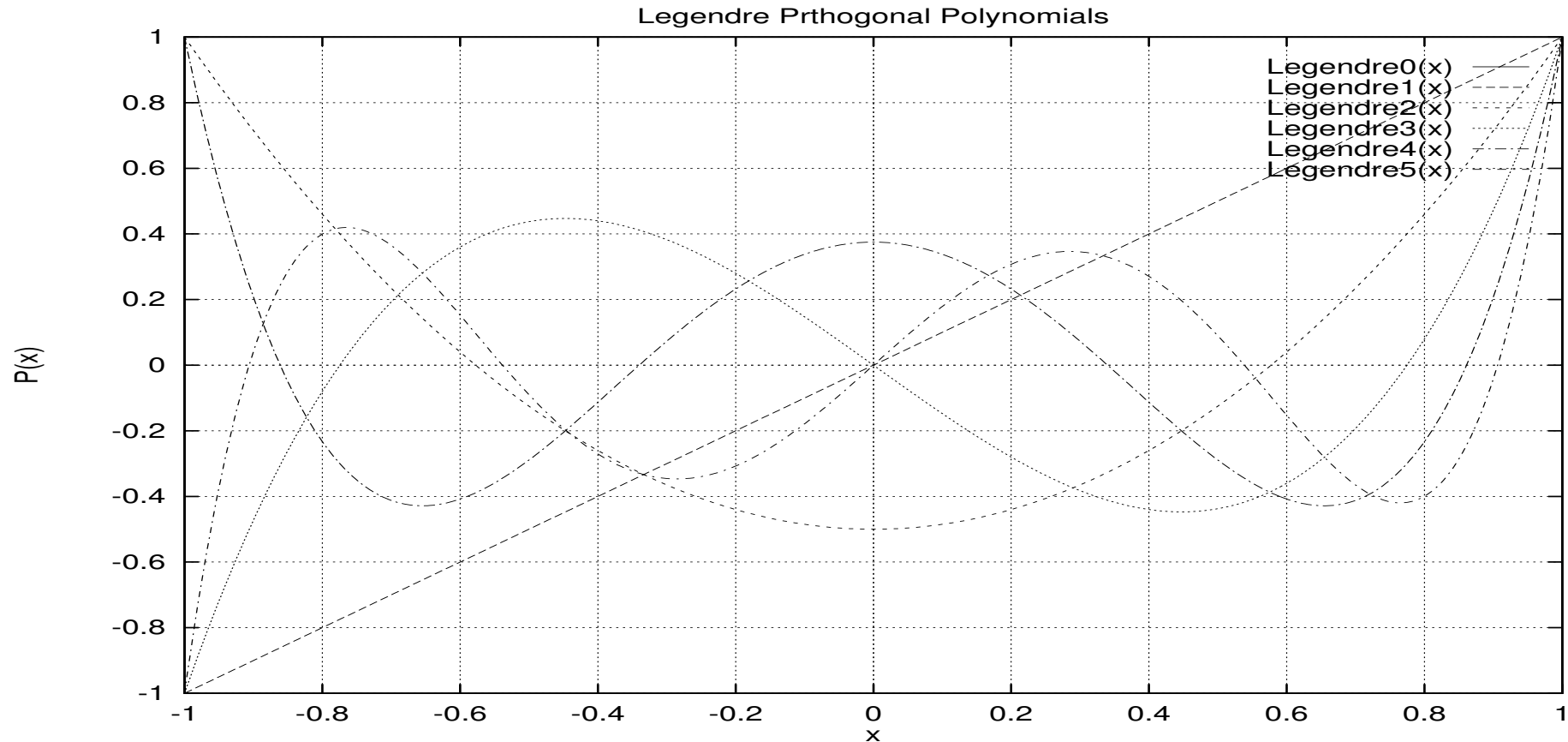
■ 区間 $(-1, 1)$ で重み関数なし。→ Legendre 直交多項式系

■ 区間 $(0, \infty)$ で重み関数 e^{-x} 。→ Laguerre 直交多項式系

■ 参考: $z = e^{j\omega}$ の冪関数列 $\{1, z, z^2, z^3, z^4, \dots\}$ から、音声スペクトルを重みとして Gram-Schmidt の直交化法で直交関数系を構成する。→ LPC (線形予測符号化法) の本質。[板倉 1966]。



* Legendre 直交多項式



Legendre 多項式 $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = (3x^2 - 1)/2, P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2, \\ P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8, P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8, \dots$$



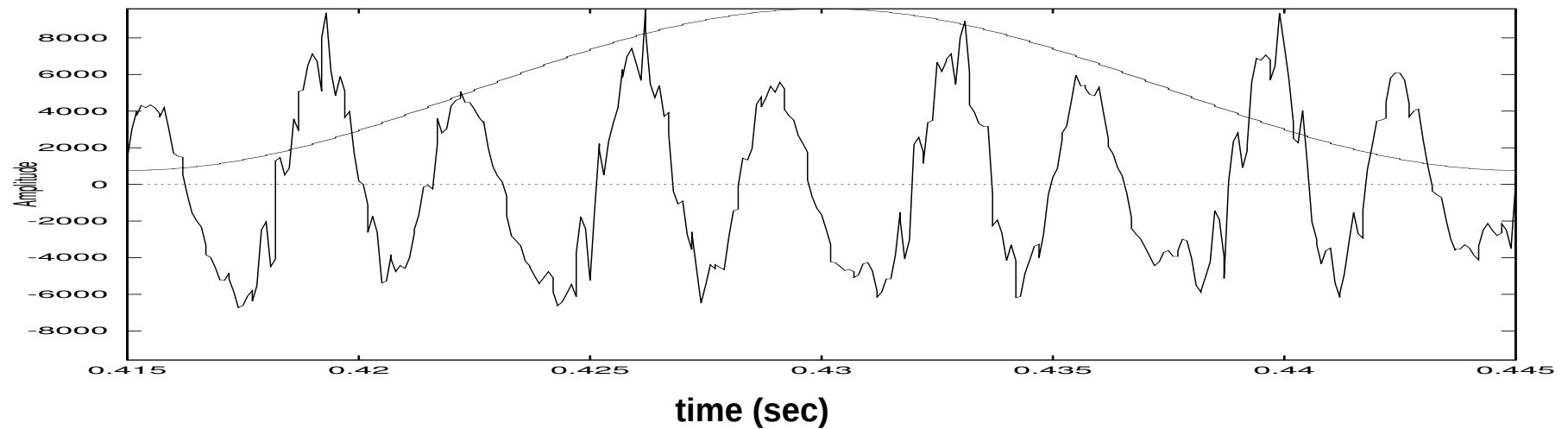
* 代表的な直交多項式

名称	記号	区間	重み
Legendre 多項式	$P_n(x)$	$(-1, +1)$	1
陪Legendre 多項式	$P_n^m(x)$	$(-1, +1)$	1
Gegenbauer 多項式	$C_n^\nu(x)$	$(-1, +1)$	$(1 - x^2)^{\nu - \frac{1}{2}}$
Tchebycheff 多項式	$T_n(x)$	$(-1, +1)$	$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
Hermite 多項式	$H_n(x)$	$(-\infty, \infty)$	$e^{-\frac{x^2}{2}}$
Jacobi 多項式	$G_n(\alpha, \gamma; x)$	$(0, 1)$	$x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}$
Laguerre 多項式	$L_n^{(\alpha)}(x)$	$(0, \infty)$	$e^{-x}x^\alpha$

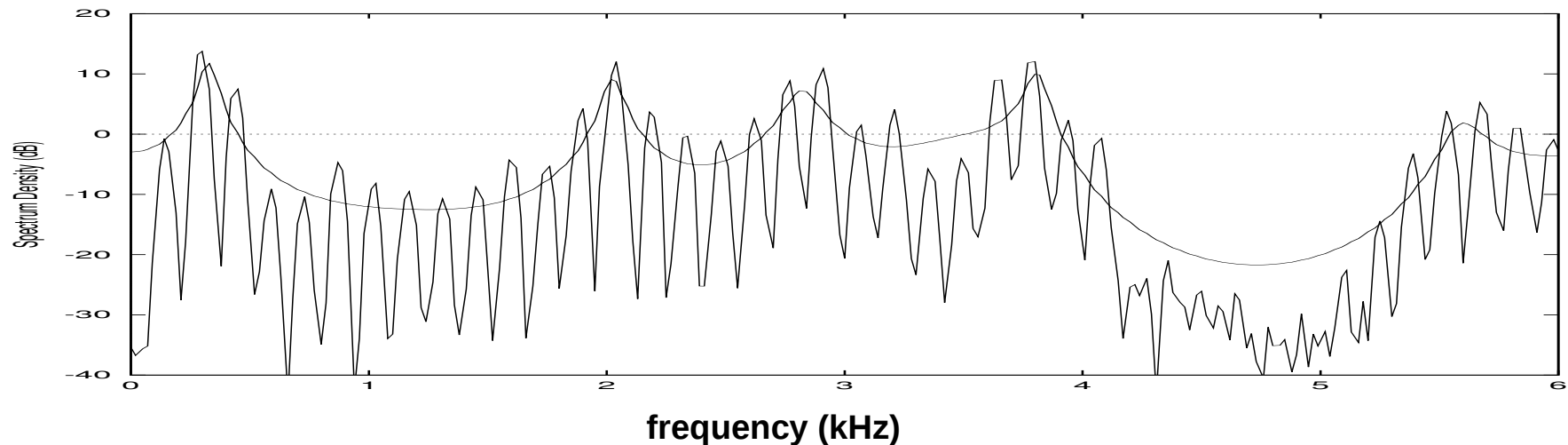
$$\int_a^b f_m(x)f_n(x)w(x)dx \begin{cases} = 0, & m \neq n \\ > 0, & m = n \end{cases}$$



音声スペクトル



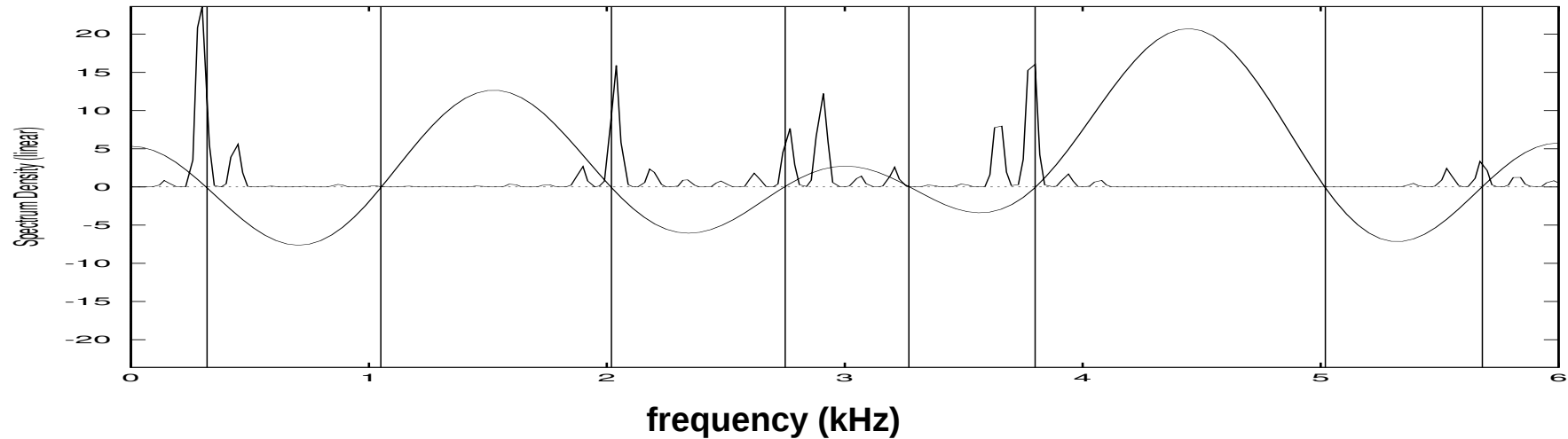
(a) 男声「こしらえる」中の *li* の音声波形 (高域強調処理前) と Hamming 窓



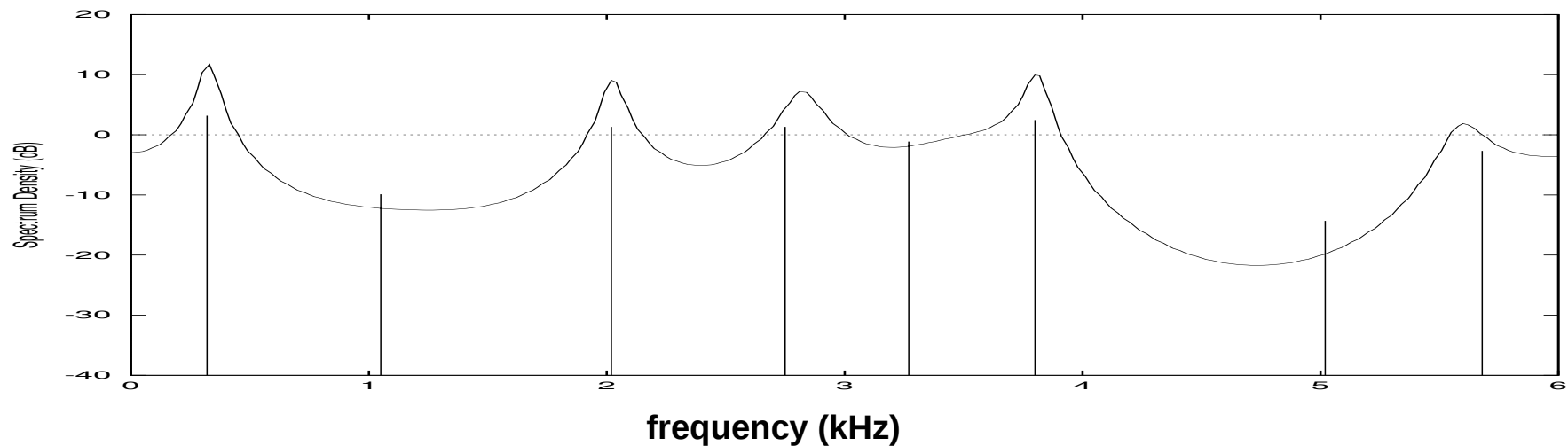
(b) 音声の対数スペクトル (細かい凹凸曲線) と線形予測分析 (LPC) によるスペクトル包絡 (滑らかな曲線)



* 音声スペクトルを重みとした直交多項式



(c) 線形軸のスペクトル(細かい凹凸曲線)、CSM 直交多項式の値、および CSM 周波数 (縦線)



(d) CSM 周波数と強度 (dB)(縦線)、すなわち直交多項式の零点と Christoffel 数
および LPC 推定による音声スペクトル包絡 (曲線)



* 直交関数と通信の話題から

- CDMA/One 方式: Walsh 関数によるスペクトル拡散
- 実験計画法: 直交計画
- フーリエ解析
- 音声分析理論 [嵯峨山・板倉1980]
音声スペクトルを重みとする直交多項式の理論
 - LPC(線形予測)分析は z の直交多項式の係数を求めること
 - PARCOR分析は z の直交多項式の漸化式係数を求めること
 - LSP 分析は $x = \cos \omega$ の直交多項式の零点を求めること
→ TwinVQ 方式、携帯電話の音声符号化



フーリエ展開

- 三角関数による直交系
- フーリエ級数、フーリエ展開
- 複素フーリエ級数、フーリエスペクトル
- フーリエ級数の収束性、**Gibbs**現象、**Dirichlet**核

Jean Baptiste Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier (March 21, 1768 - May 16, 1830)





数学者物語: Fourier

- **Jean Baptiste Joseph Fourier** (Born: 21 March 1768 in Auxerre, Bourgogne, France; Died: 16 May 1830 in Paris, France)
- 裁縫職人の9番目の子。8才で孤児。学才を買われ、**Auxerre** 王立軍学校へ。14 才で **Bézout** の数学をマスター。19 才で修道院へ。22 才で、**Auxerre** 王立軍学校の教師。数学と宗教のどちらを取るか悩む。
- 1793 年、地域の革命委員会に参加。抜けられずに悩む。ある派閥を擁護して逮捕され、あわやギロチン。ロベスピエールが処刑されて、フーリエは自由になる。
- 26 才でエコール・ノルマル(ナポレオンが1795年設立)に進み、**Lagrange** と **Laplace** に学ぶ。1795 年、エコール・ポリテクニクで教える。1797 年、**Lagrange** の後任。
- 1798 年、ナポレオンのエジプト遠征に科学顧問として参加。文化工作に貢献。ナポレオン帰国後、**Isère** 県の長官に指名された。熱伝導研究は **Grenoble** でのこと。
- **Fourier** 級数の最初の論文は、1807 年 12 月 21 日、**Lagrange, Laplace, Monge, Lacroix** らにより審査されたが、評価されなかった。王への忠誠を説いたが、ナポレオンがエルバ島脱出時、ナポレオンを恐れてグルノーブル脱出。のち中立的立場を説明して、ローヌ県の長官の指名を受けるが、結局辞職。
- 1817 年、科学アカデミーの会員に選出。1822 年、熱伝導の解析理論が出版される。



* 余談：数学者たち

- **Marc-Antoine Parseval des Chênes** (27 Apr 1755 in Rosières-aux-Saline, France — 16 Aug 1836 Paris) 王党派で体制に反対する詩を出版したため、ナポレオンが逮捕を命じたので、フランスを脱出。論文5件、2番めが有名な **Parseval** の定理。
- **Hans Rademacher** (Born: 3 April 1892 in Wandsbeck, Schleswig-Holstein, Germany; Died: 7 Feb 1969 in Haverford, Pennsylvania, USA)
- **Alfréd Haar** (Born: 11 Oct 1885 in Budapest, Hungary; Died: 16 March 1933 in Szeged, Hungary)
- **Jacques Salomon Hadamard** (Born: 8 Dec 1865 in Versailles, France; Died: 17 Oct 1963 in Paris, France)
- **Raymond Edward Alan Christopher Paley** (Born: 7 Jan 1907 in England; Died: 7 April 1933 in Banff, Alberta, Canada)
- **Adrien-Marie Legendre** (Born: 18 Sept 1752 in Paris, France; Died: 10 Jan 1833 in Paris, France)
- **Edmond Nicolas Laguerre** (Born: 9 April 1834 in Bar-le-Duc, France; Died: 14 Aug 1886 in Bar-le-Duc, France)
- **Pafnuty Lvovich Chebyshev** (Born: 16 May 1821 in Okatovo, Russia; Died: 8 Dec 1894 in St Petersburg, Russia)



* 余談：数学者たちの名前

- Laplace - la place 場所、所、職、席次、広場、市場、要塞
- Lagrange - la grange 納屋、穀物庫
- Legendre - le gendre 婿
- Laguerre - la guerre 戦争、戦法、陸軍省
- Rademacher - Rad 輪、車輪、水車 ; Rade ムギナデシコ
- Haar - Haar 毛、毛髪、繊維

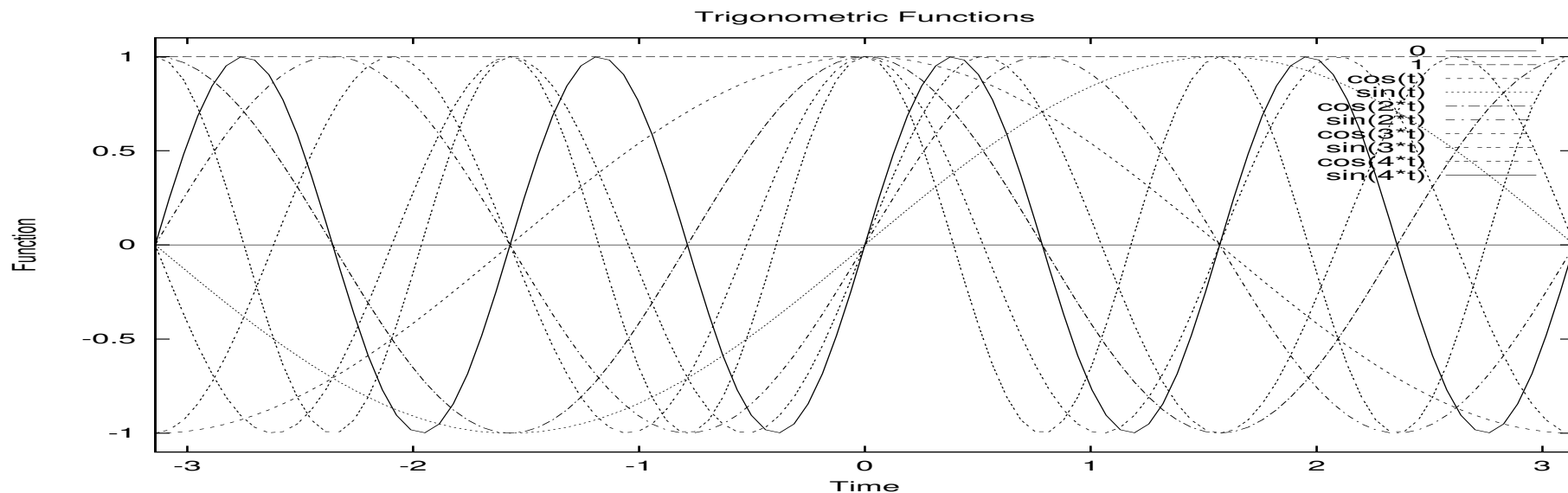


三角関数による直交系 1/2

■ 余弦関数: $\{\cos k\Omega t\}$ — 直交関数系 (完全ではない)
e.g., 奇関数を表せない

正弦関数: $\{\sin k\Omega t\}$ — 直交関数系 (完全ではない)
e.g., 偶関数を表せない

■ 三角関数系: $\{1, \cos \Omega t, \sin \Omega t, \cos 2\Omega t, \sin 2\Omega t, \dots\}$ — 完全直交関数系





三角関数による直交系 2/2

- 関数 $f(t)$ の区間 $(t_0, t_0 + T)$ での三角関数系による展開 (いわゆるフーリエ級数展開)

$\Omega = 2\pi/T$ とすると (注意: 記号は同じだが特性周波数ではない)

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t), \quad t_0 < t < t_0 + T$$

と書けて、直交展開係数は以下のように求められる。

$$a_k = \frac{\int_{t_0}^{t_0+2\pi/\Omega} f(t) \cos k\Omega t dt}{\int_{t_0}^{t_0+2\pi/\Omega} \cos^2 k\Omega t dt} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos k\Omega t dt$$

$$b_k = \frac{\int_{t_0}^{t_0+2\pi/\Omega} f(t) \sin k\Omega t dt}{\int_{t_0}^{t_0+2\pi/\Omega} \sin^2 k\Omega t dt} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin k\Omega t dt$$

- 三角級数の位相と振幅 - $\cos$ と $\sin$ をまとめて、位相・振幅で表現

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(k\Omega t + \phi_k)$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \phi_k = -\tan^{-1}(b_k/a_k)$$



偶関数と奇関数

■ 任意の関数は、偶関数と奇関数の和で表せる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{f(t) + f(-t) + f(t) - f(-t)}{2} \\ &= \underbrace{\frac{f(t) + f(-t)}{2}}_{\text{偶関数 } f_e(t)} + \underbrace{\frac{f(t) - f(-t)}{2}}_{\text{奇関数 } f_o(t)} \end{aligned}$$

偶関数 $f_e(t) = f_e(-t)$ 、奇関数 $f_o(t) = -f_o(-t)$ 。

■ 例題： $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$ を偶関数と奇関数との和で表せ。



演習問題：偶関数と奇関数

1. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x^2 + x - 7$ を奇関数 $f_o(x)$ と偶関数 $f_e(x)$ の和 $f(x) = f_o(x) + f_e(x)$ に分けなさい。
2. $g(x) = 3 \sin(x - \frac{\pi}{4})$ を奇関数 $g_o(x)$ と偶関数 $g_e(x)$ の和 $g(x) = g_o(x) + g_e(x)$ に分けなさい。
3. $h(x) = e^{-(x-1)^2}$ を奇関数 $h_o(x)$ と偶関数 $h_e(x)$ の和 $h(x) = h_o(x) + h_e(x)$ に分けなさい。



偶関数と奇関数のフーリエ級数

■ 関数 $f(t)$ の区間 $(-T/2, T/2)$ でのフーリエ級数展開 ($\Omega = 2\pi/T$)

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t)$$

■ 関数 $f(t)$ が偶関数: $f(t) = f(-t)$ → フーリエ余弦(cos)級数

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\Omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\Omega t dt$$
$$b_k = 0$$

■ 関数 $f(t)$ が奇関数: $f(t) = -f(-t)$ → フーリエ正弦(sin)級数

$$a_k = 0$$
$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\Omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\Omega t dt$$



複素(指数)フーリエ級数と負の周波数の概念

■ Eulerの公式: $e^{j\Omega t} = \cos \Omega t + j \sin \Omega t$ から、

$$\cos \Omega t = \frac{e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}}{2}, \quad \sin \Omega t = \frac{e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}}{2j}$$

より、

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \Omega t + b_k \sin \Omega t) \\ &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{ (a_k - jb_k) e^{jk\Omega t} + (a_k + jb_k) e^{-jk\Omega t} \} \end{aligned}$$

■ $\left\{ \begin{array}{l} c_0 = a_0 \\ c_k = (a_k - jb_k)/2 \\ c_{-k} = (a_k + jb_k)/2 \end{array} \right\}$ とおけば、(→ 重要: 負の周波数の概念！)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega t}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\Omega t} dt$$



偶関数と奇関数の複素フーリエ級数

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega t}$$

において $f(t)$ が実関数ならば、

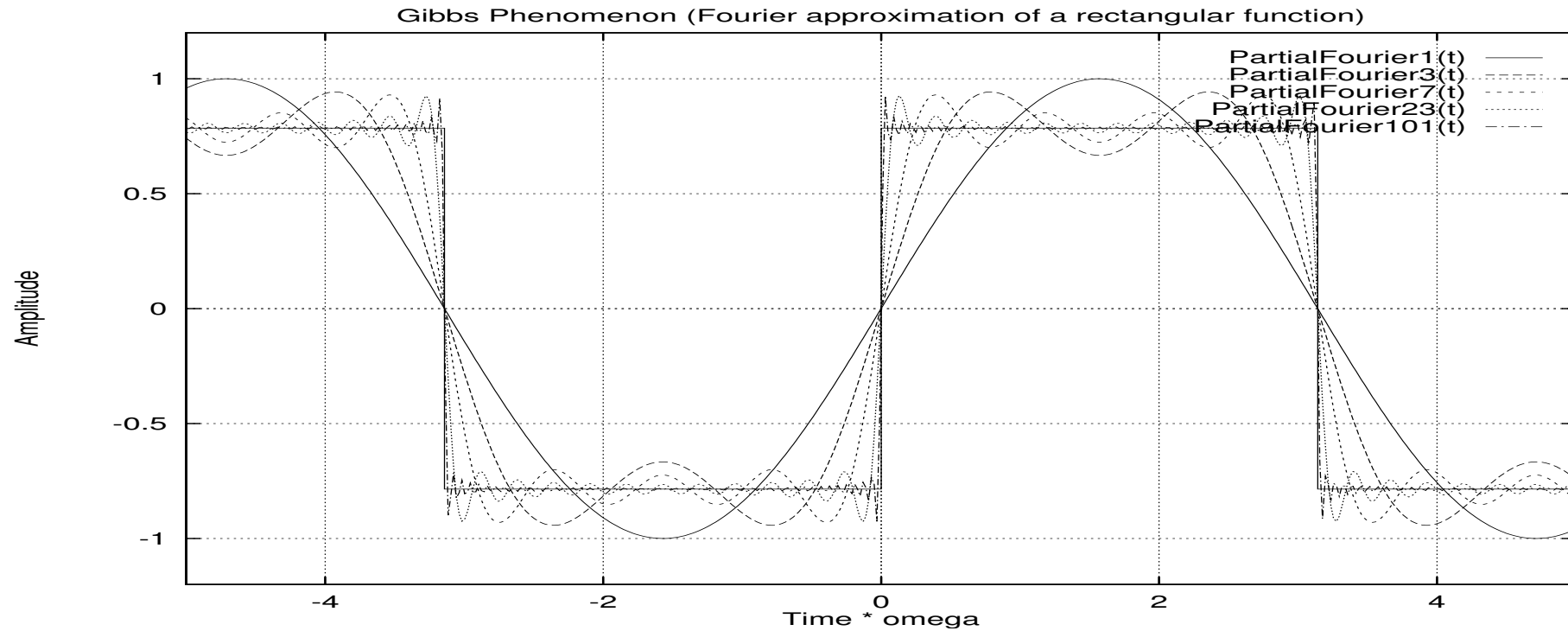
$$\Re c_k = \Re c_{-k}$$

$$\Im c_k = -\Im c_{-k}$$

- 実関数 $f(t)$ が偶関数 ($f(t) = f(-t)$) ならば、 c_n は全て実数
- 実関数 $f(t)$ が奇関数 ($f(t) = -f(-t)$) ならば、 c_n は全て虚数



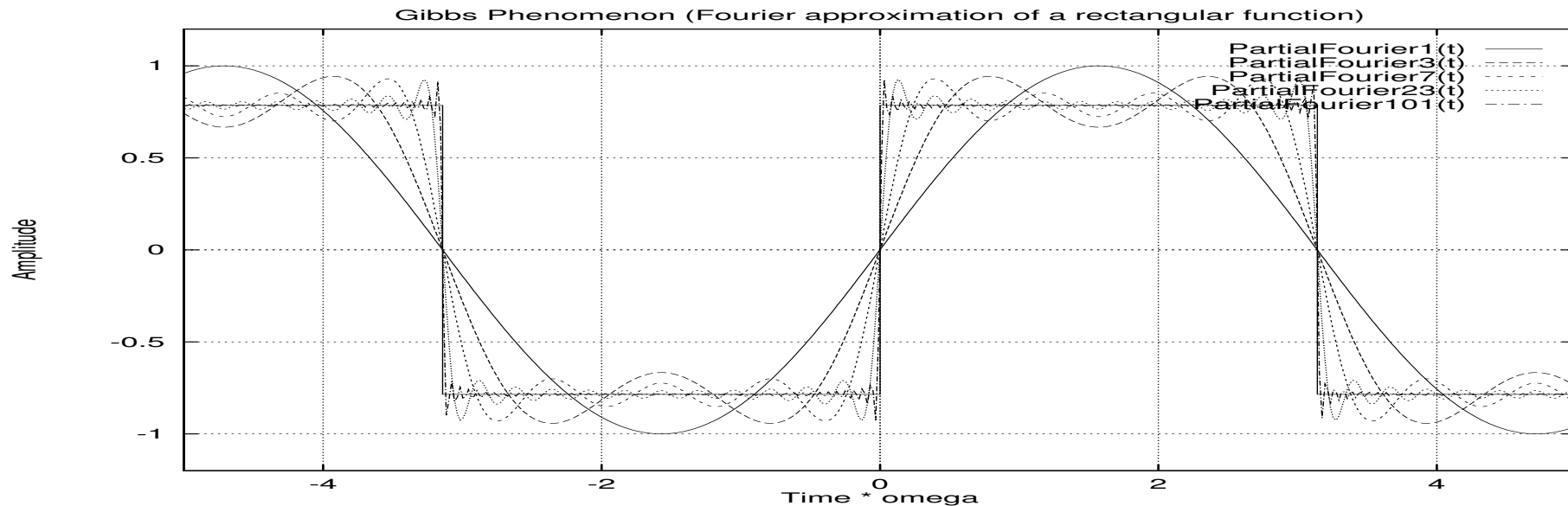
演習：矩形波のFourier展開



$$f(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0 \geq \pi) \\ 0 & (t = 0, t = \pm\pi) \\ -1 & (-\pi \geq t \geq 0) \end{cases}$$



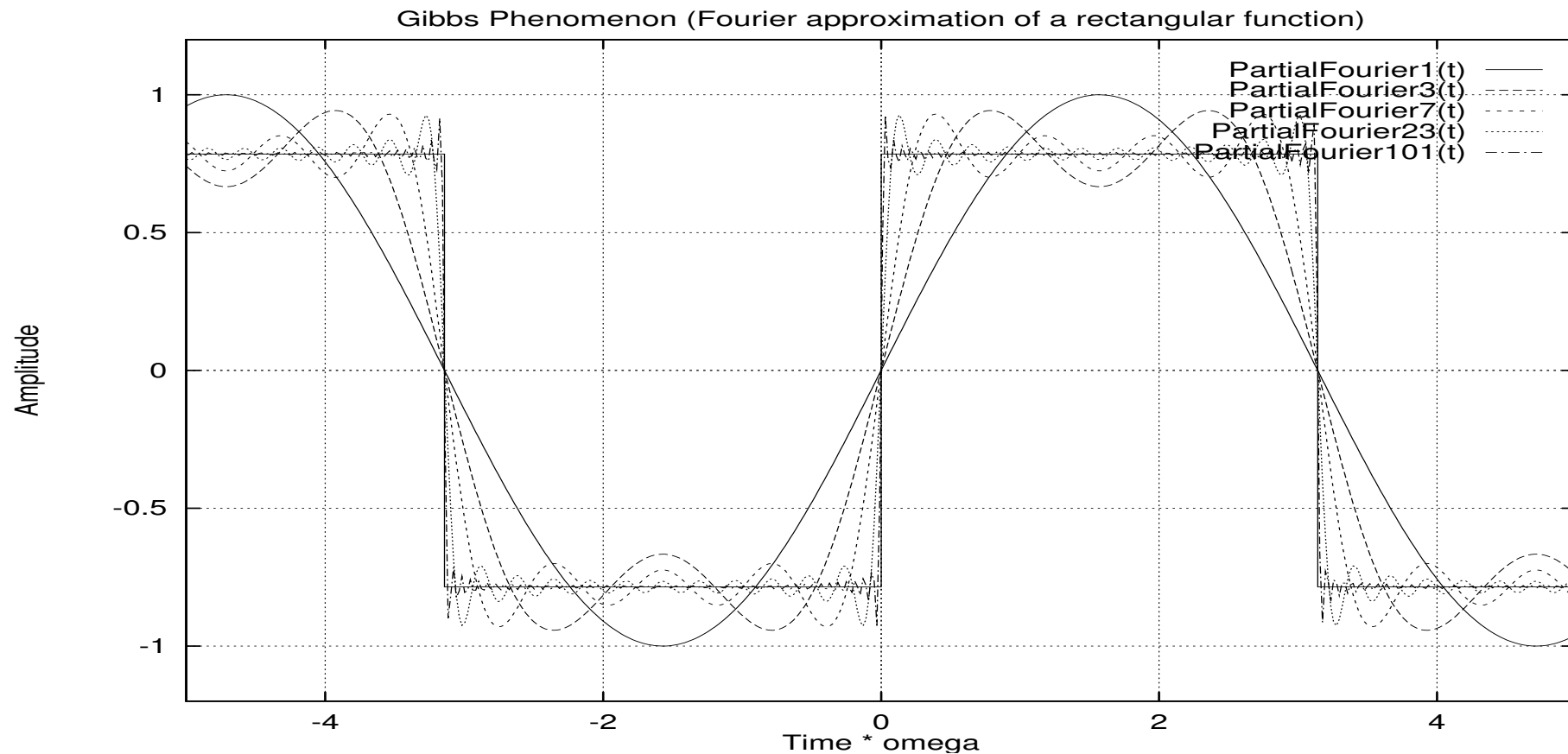
矩形波のFourier展開



$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sgn } t \cdot (-j) \sin kt dt \\
 &= \frac{-2j}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin kt dt = \frac{j}{\pi} [\cos kt/k]_0^{\pi} \\
 &= \begin{cases} 0 & (k = \text{偶数}) \\ -\frac{2j}{k} & (k = \text{奇数}) \end{cases} \rightarrow \text{矩形波は奇数倍音のみ}
 \end{aligned}$$



Gibbs の現象



不連続関数のフーリエ級数近似(部分和)で、不連続点で**1.17897975倍**(Gibbsの定数 $= \frac{2}{\pi} \text{Si } \pi$)のオーバーシュート。(不連続幅の9%近い誤差)



* 「Gibbsの現象」物語

- 級数が収束するならば、部分和で十分良い近似が得られる、と考えるのが工学的なセンス。ところが！
- 不連続関数のフーリエ級数近似(つまり、級数の部分和)で、不連続点で**1.17897975**倍 (Gibbsの定数 $= \frac{2}{\pi} \text{Si}\pi$) のオーバーシュート。(不連続幅の9%近い誤差)
- **1898年、Michelson + Stratton**：調和解析機製作。任意の関数に対して80次までのフーリエ成分を計算。方形波の分析・合成で奇妙な現象を発見。Gibbsに相談。
- **Josiah Willard Gibbs (1839–1903)**、「不連続点近くでフーリエ級数が一様収束しないから」と解明して *Nature* に発表。J. W. Gibbs: Fourier's series, *Nature*, Vol. 59, No. 200, pp. 606-, 1898–99.
- 後に、ボーシェ(1906)がより厳密に現象解明したとき「ギブス現象」と呼んだ。
- すでに **1848年**、ウィルブラハムが同じ現象の説明。**1874年**、デュ・ボア・レイモンも同じ問題を検討した。(以上、伏見・赤井「直交関数系」より)



* ディリクレ(Dirichlet)核

■ 周期 2π の関数 $f(t)$ のフーリエ級数の部分和は、

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{-jk\Omega t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-jkt} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{jk\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^n e^{jk(\tau-t)} f(\tau) e^{jk\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^n e^{jk(\tau-t)} f(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\tau - t) f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

ただし $D_n(t)$ は、Dirichlet 核:

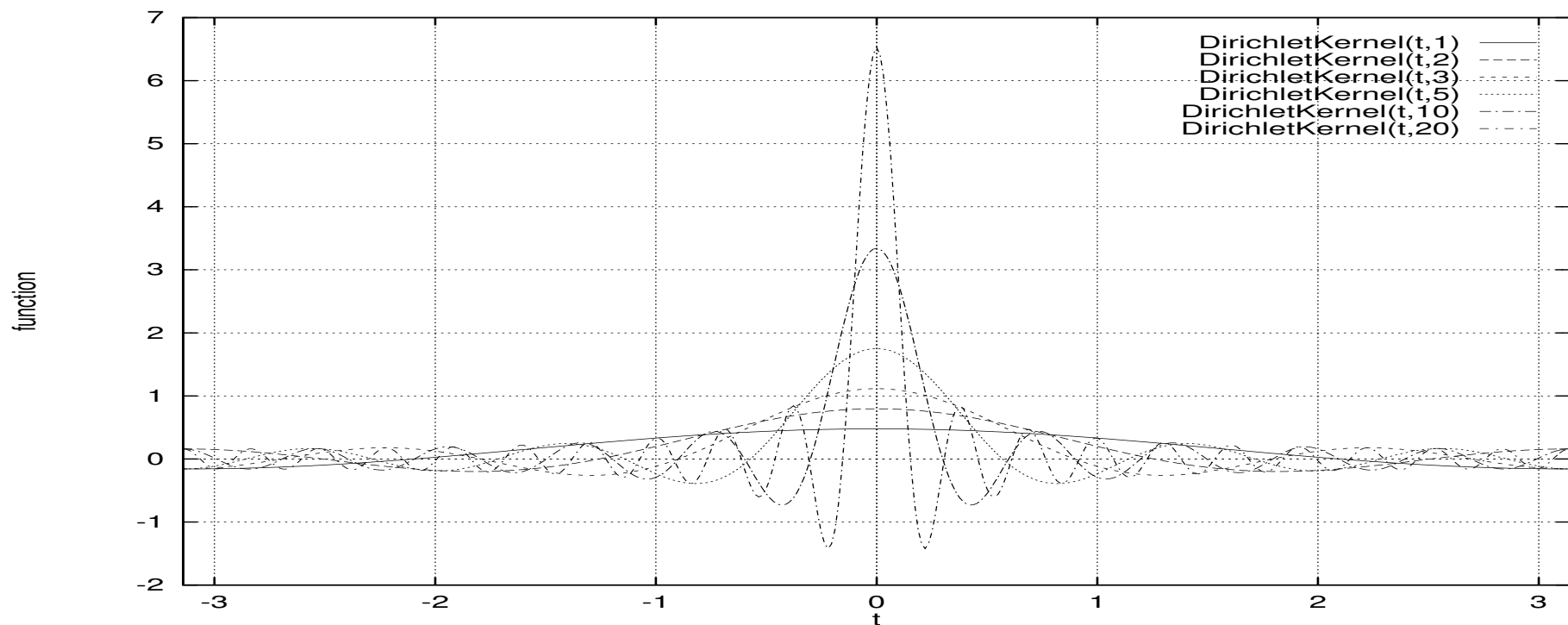
$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t}$$



* ディリクレ(Dirichlet)核 (続き)

■ つまり、フーリエ級数の最初の n 項の和は、元の関数とDirichlet核 $D_n(t)$ の畳み込みである!

- 下のようなインパルス応答の線形系に入力したときの出力
- 不連続点付近で激しいリンギング → **Gibbs現象**





* フーリエ級数の収束性: Dirichlet の条件

■ ディリクレ (Dirichlet の条件) — 収束条件 (Hsu p. 18)

関数 $f(t)$ が一周期において

(1) 区分的に連続:

- 不連続点は有限個。
- 不連続点 t_0 で $\lim_{e \rightarrow 0} f(t_0 + e), \lim_{e \rightarrow 0} f(t_0 - e)$ が存在して有限の値を取る。

(2) 区分的に滑らか:

- 区分的に連続な関数 $f(t)$ の導関数 $f'(t)$ が区分的に連続。
 $f'(t)$ は区分内で連続、かつ不連続点で $f'(t_0 + 0), f'(t_0 - 0)$ が存在して有限。

* Fourier 級数の収束条件は、いろいろな表現の仕方があるが、Dirichlet の条件が最も簡潔

- 関数 $f(t)$ が一周期において絶対積分可能である。

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt < \infty$$



* フーリエ級数の収束性

■ リポー・フェイェール (Lipót - Fejér) の定理

関数 $f(t)$ が区間 $-\pi < t < \pi$ で定義されており、絶対積分可能で、区間内各点 t で $f(t-)$ 、 $f(t+)$ が存在すれば、フーリエ級数(部分和の相加平均)は

$$\frac{1}{2}\{f(t-) + f(t+)\}$$

に収束する。特に、点 t で連続ならば、 $f(t)$ に収束。



演習：鋸波のフーリエ級数展開



周期 2π の傾き1の鋸波



鋸波のフーリエ級数展開 (例題)

■ 2π を周期とする鋸波波: $\rightarrow$ 奇関数

$$f(t) = t \quad (-\pi < t < \pi), \quad f(t + 2\pi) = f(t)$$

■ **Fourier 級数展開係数 ($k \neq 0$):** $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-jkt} dt$

これを、 $\frac{d}{dt}[t e^{-jkt}] = e^{-jkt} - jkt e^{-jkt}$ を用いて部分積分すると、

$$c_k = \frac{1}{-2jk\pi} \left[t e^{-jkt} - \frac{1}{-jk} e^{-jkt} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{-2jk\pi} \cdot 2\pi(-1)^k = \frac{(-1)^k j}{k} \quad (\text{純虚数})$$

従って、フーリエ級数は、

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k j}{k} e^{-jkt} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kt \\ &= 2 \left(\sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{4} + \dots \right) \end{aligned}$$

■ 注: このケースは、直接 $\sin$ 展開する方が計算が易しい。奇関数であるから $\sin$ のみの級数になる。



鋸波のフーリエ級数展開 (図解)



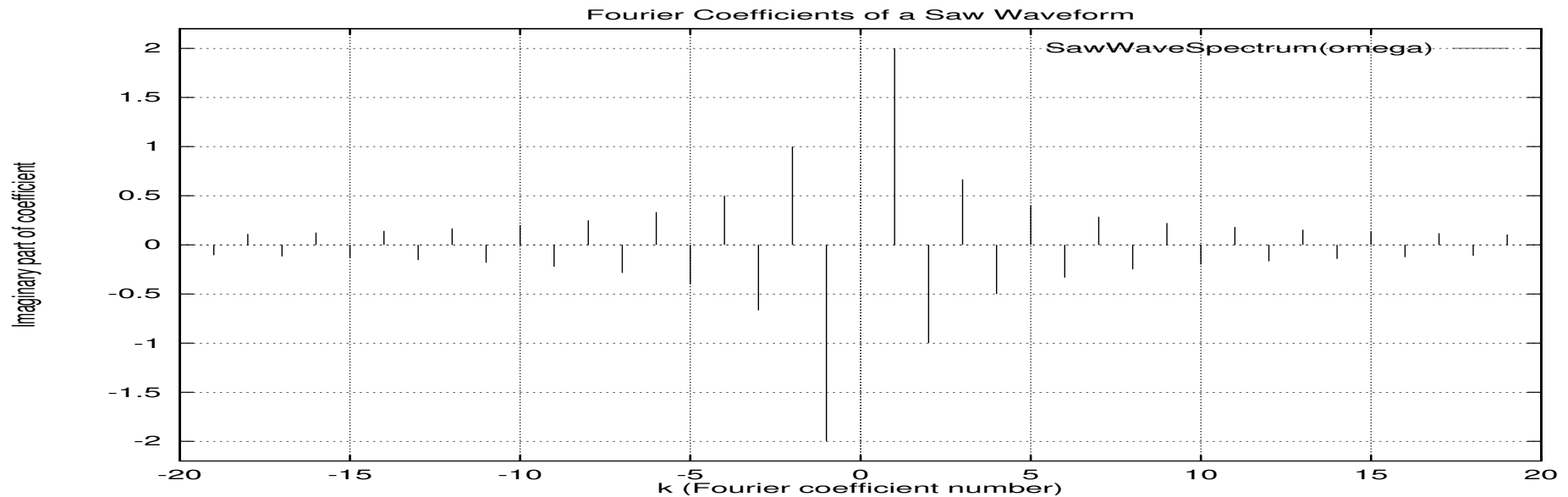
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{jk} e^{jkt} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kt \quad (\text{奇関数だから})$$

$$= 2\left(\sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{4} + \frac{\sin 5t}{5} - \dots\right)$$

→ 「鋸波は、周波数に反比例した振幅の整数倍音を持つ。」(音響学的解釈)



鋸波のフーリエスペクトル



■ 鋸波の(複素)フーリエ係数列 (実数部=0, 虚数部= $(-1)^{k-1}/k$)

■ スペクトル: フーリエ級数

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega t}$$

は、(角)周波数 $k\Omega$ の整数倍で、周波数成分 c_k を持つ。

■ 複素スペクトル、正・負の周波数



フーリエ変換

- フーリエ積分定理、フーリエ変換・逆変換
- フーリエ変換の性質、畳み込み定理
- デルタ関数、フーリエ変換公式集



フーリエ級数からフーリエ積分へ

■ 区間 $(-1/T, 1/T)$ での $f(t)$ のフーリエ級数展開 (復習)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega t}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

- 任意の関数 $f(t)$ を有限区間 $(-\frac{1}{T} \leq t \leq \frac{1}{T})$ で級数表現。
(T を周期とする周期関数 $f(t)$ を全区間 $(-\infty < t < \infty)$ で級数表現。)

→ フーリエ係数列 $\{c_k\}$ (複素係数) あるいは正弦係数と余弦係数

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\Omega t} dt$$

■ $f(t)$ の再帰的な表現 (上の2式を互いに代入)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jk\Omega\tau} d\tau \right] e^{jk\Omega t}$$

積分区間 T を無限大にするとどうなるか? → **Fourier** の積分定理
(関数 $f(t)$ はそのまま、フーリエ展開の区間を無限に広げて行く。)

$\Omega = \frac{2\pi}{T}$ を $\Delta\omega$ と書き換えて、 $\Delta\omega \rightarrow 0$



Fourierの積分定理

Fourier の積分定理

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau d\omega$$

■ 2回積分すると元に戻るなんて、びっくり！

■ 直観的導出

フーリエ展開において、係数 c_k を求める式を代入すると、 $f(t)$ は $f(t)$ 自身によって

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jk\Delta\omega\tau} d\tau \right] e^{jk\Delta\omega t}, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{jk\Delta\omega(t-\tau)} d\tau \right] \Delta\omega \end{aligned}$$

と書けるから、 $T \rightarrow \infty$ の極限を取ると、 $(k\Delta\omega \rightarrow \omega, \Delta\omega \rightarrow d\omega)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau d\omega$$

QED



* フーリエ変換

「Fourierの積分定理」から

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d\tau d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(\omega) d\omega \end{aligned}$$

これを $F(\omega)$ と書く

$$\text{但し、} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

任意の関数 $f(t)$ を全区間 $(-\infty < t < \infty)$ で積分表現。



フーリエ変換とフーリエ逆変換

時間の関数(信号) $f(t)$



Fourier 変換

$$F(\omega) = \mathcal{F} [f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$



周波数の関数(スペクトル) $F(\omega)$



Fourier 逆変換

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} [F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

(角) 周波数 ω において、 $d\omega$ の幅に $F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ 分の成分 (周波数成分) を持つ。



時間の関数(信号) $f(t)$



* フーリエ変換対とラプラス変換対

■ Fourier 変換対 (相互変換可能、同一情報の表と裏)

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \longleftrightarrow & F(\omega) \\ \text{時間}(t)\text{領域} & & \text{周波数}(\omega)\text{領域} \end{array}$$

Cf. Laplace 変換対 (相互変換可能、同一情報の表と裏)

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \longleftrightarrow & F(s) \\ \text{時間}(t)\text{領域} & & \text{演算子}(s)\text{領域} \end{array}$$

■ Laplace 変換と Fourier 変換の関係は？



参考：Fourier 変換の定義のさまざまな流儀

■ フーリエ変換の係数が1の方式。(本講義はこの方式)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

フーリエ級数の定義区間長 T を $T \rightarrow \infty$ とすることにより、自然な拡張で定義する点でわかりやすい。

■ 逆フーリエ変換の係数が1の方式。

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$\frac{1}{2\pi}$ の係数を反対に置いている。これは、信号は各周波数成分 $X(\omega)$ の総和(積分)になっているという直観によく合う定義である。特に $X(\omega)$ がパワースペクトルの場合 $x(0)$ (自己相関関数の $\tau = 0$ の値) は総パワーになる。

■ 対称な係数を用いる方式。

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

完全に対称になるので、美しさを求める数学で用いられる。ただし、物理的な意味が明確でなく、工学ではあまり用いない。

■ 周波数 f を用いる方式。

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

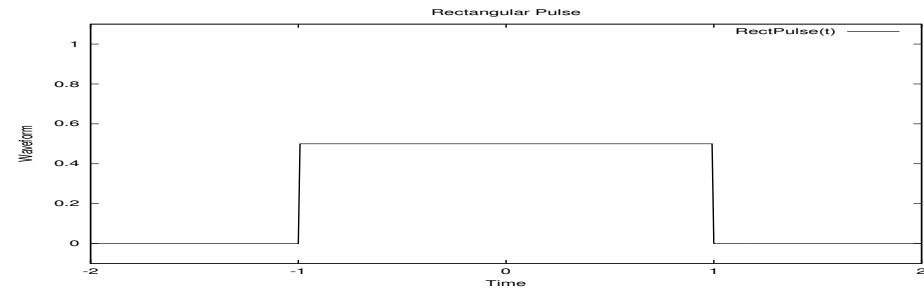
角周波数 ω でなくいわゆる周波数を用いる。Hz 単位でスペクトル領域で考えるにはこの方が便利。通信理論や通信方式の実際で用いられる。



sinc関数: 矩形パルスのフーリエ変換 (重要)

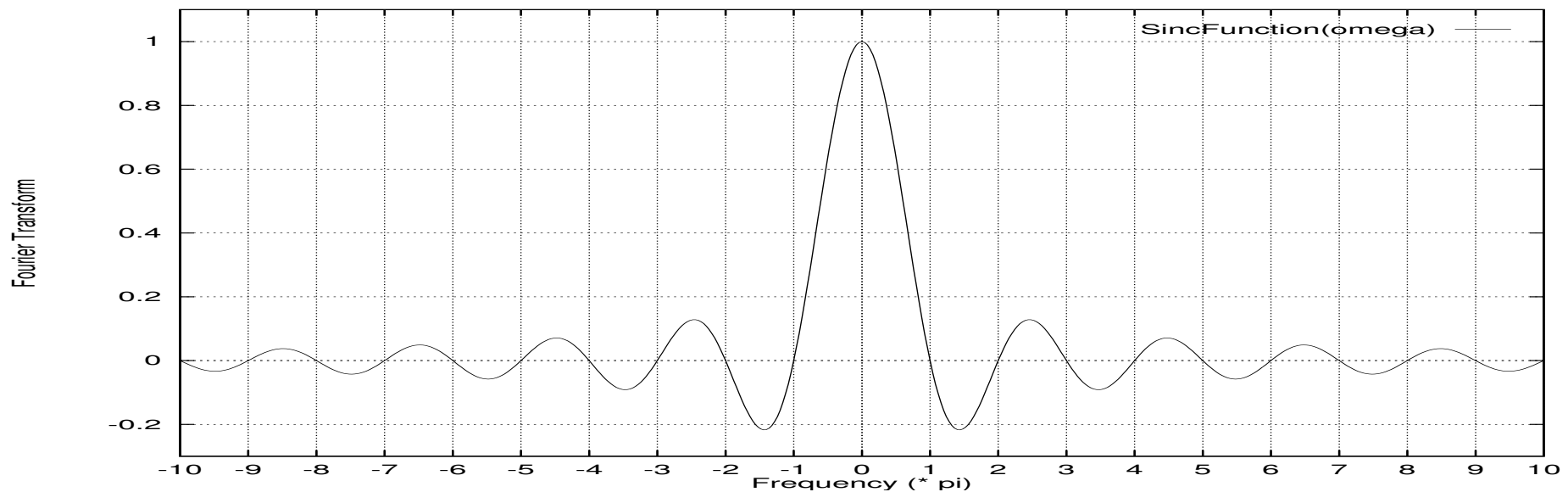
矩形パルス波形

$$f(t) = \begin{cases} 1/2, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$



のフーリエ変換は **sinc関数**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} [je^{-j\omega t}]_{-1}^1 = \frac{\sin \omega}{\omega} = \text{sinc } \omega$$





フーリエ変換の存在条件

フーリエ変換

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt < \infty$$

が存在するための条件。 $|e^{-j\omega t}| = 1$ だから、

■ 関数 $f(t)$ が $-\infty < t < \infty$ において区分的に滑らか。

■ 関数 $f(t)$ が絶対可積分。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

■ 不連続点の値

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$$



最重要 フーリエ変換の性質 (1/3)

$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$, $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$ 、
 a, a_1, a_2 を定数とすると、

■ 線形性 (linearity)

$$\mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

■ 縮尺 (scaling)

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

■ 時間反転 (time inversion)

$$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$$

■ 時間シフト (time shift)

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

■ 周波数シフト (frequency shift)

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\Omega t}] = F(\omega - \Omega)$$



応用例：時間シフトのフーリエ変換の応用

公式 $\mathcal{F}[f(t - \tau_i)] = F(\omega)e^{-j\omega\tau_i}$

時間領域 $m_i(t) = s(t) + n(t + \tau_i)$

周波数領域 $M_i(\omega) = S(\omega) + N(\omega)e^{-j\omega\tau_i}$

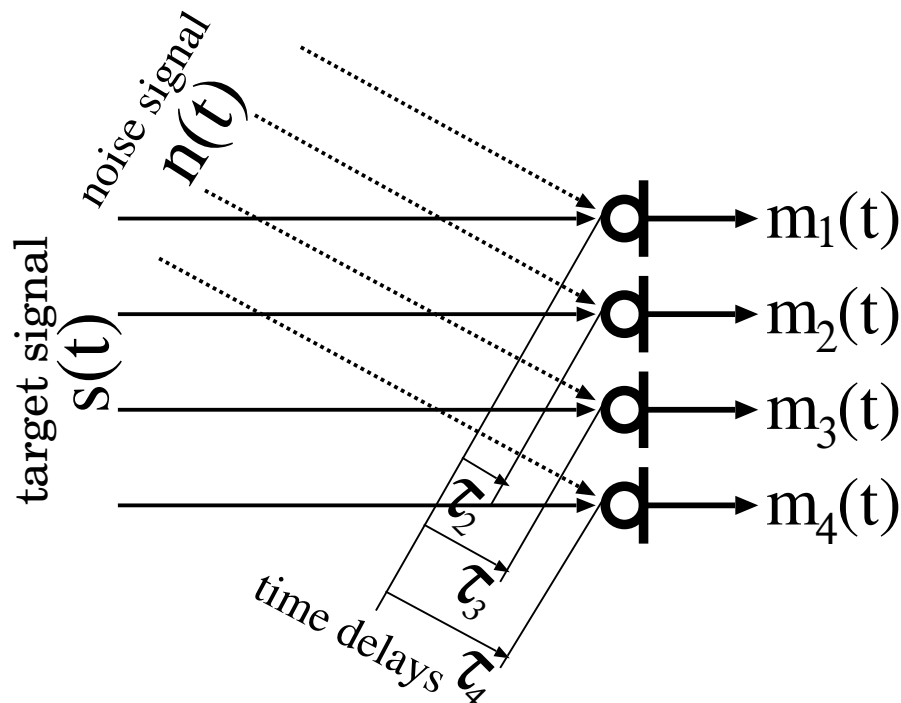


図1. アレイマイクロフォン

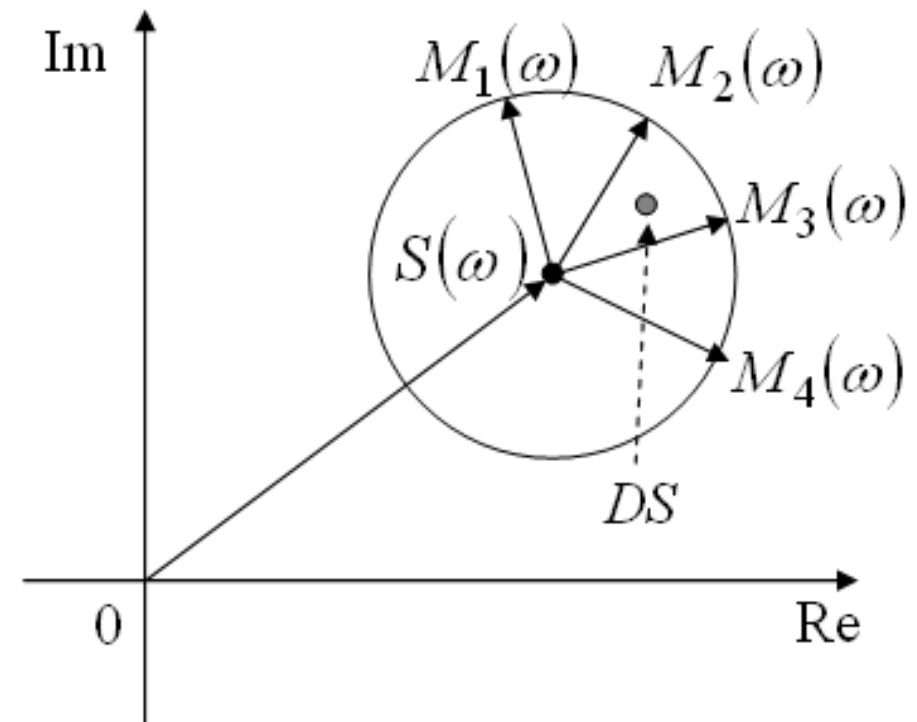


図2. CSCC法[岡嶋ら 2002]の原理



最重要 フーリエ変換の性質 (2/3)

■ 対称性 (symmetry)

$$\mathcal{F} [F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

■ 時間微分 (differentiation)

$$\mathcal{F} [f'(t)] = j\omega F(\omega) = j\omega \mathcal{F} [f(t)]$$

■ 時間積分 (integration)

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = F(0) = 0$ ならば、

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F} [f(t)]$$

■ 周波数微分 (differentiation)

$$\mathcal{F} \left[(-jt)^k f(t) \right] = \frac{d^k}{d\omega^k} F(\omega)$$



最重要 フーリエ変換の性質 (3/3)

■ 畳み込み定理 (convolution theorem)

$$\mathcal{F} [f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

■ 畳み込み (合成積, convolution) とは ...

■ 定義

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

■ 可換則 (commutative law)

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

■ 結合則 (associative law)

$$(f_1(t) * f_2(t)) * f_3(t) = f_1(t) * (f_2(t) * f_3(t))$$

■ δ 関数

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

$$f(t) * \delta(t - \tau) = f(t - \tau)$$

(δ 関数との畳み込みは、 δ 関数の場所へ移動すること)



周波数畳み込み定理

■ 周波数畳み込み定理

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega) * F_2(\omega)\} = 2\pi f_1(t)f_2(t)$$

または

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

■ 応用例: Lag Window 法

特許 → 音声符号化国際標準で使用

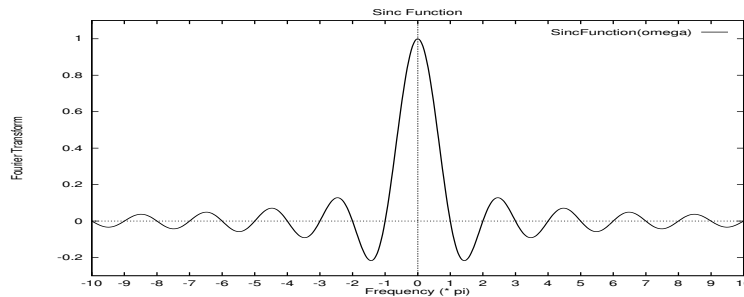
- ピッチ微細構造の影響を受けない **LPC** 分析をしたい → 平滑化音声スペクトルを **LPC** 分析する → 自己相関関数にラグ窓を掛けた後、**LPC** 分析などを行う
- $F_1(\omega)$: 音声スペクトル → $f_1(t)$: 音声自己相関関数
- $F_2(\omega)$: 平滑化窓関数 → $f_2(t)$: ラグ窓関数
- $F_1(\omega) * F_2(\omega)$: 平滑化音声スペクトル → $2\pi f_1(t)f_2(t)$: 自己相関関数にラグ窓を掛ける



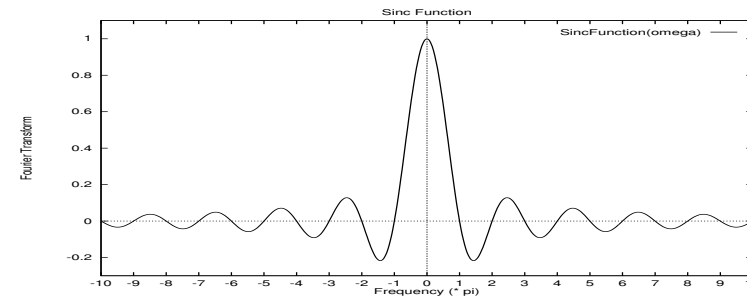
演習: sinc 関数同士の畳み込み

■ 例題: sinc 関数同士の畳み込みは?

$$\text{sinc } t * \text{sinc } t = ?$$



*

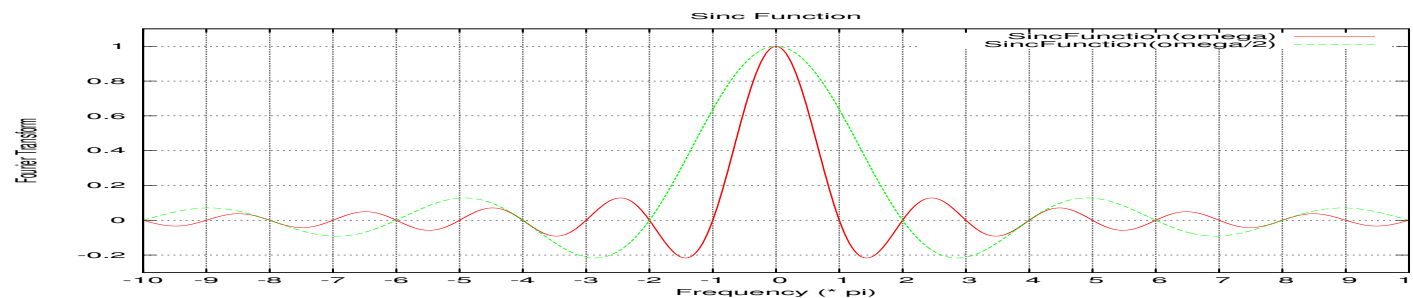


= ?

ディジタルフィルタ理論、ディジタル信号処理の基礎として重要

■ 異なる周期(?)の sinc 関数同士の畳み込み

$$\text{sinc } at * \text{sinc } bt = ?$$

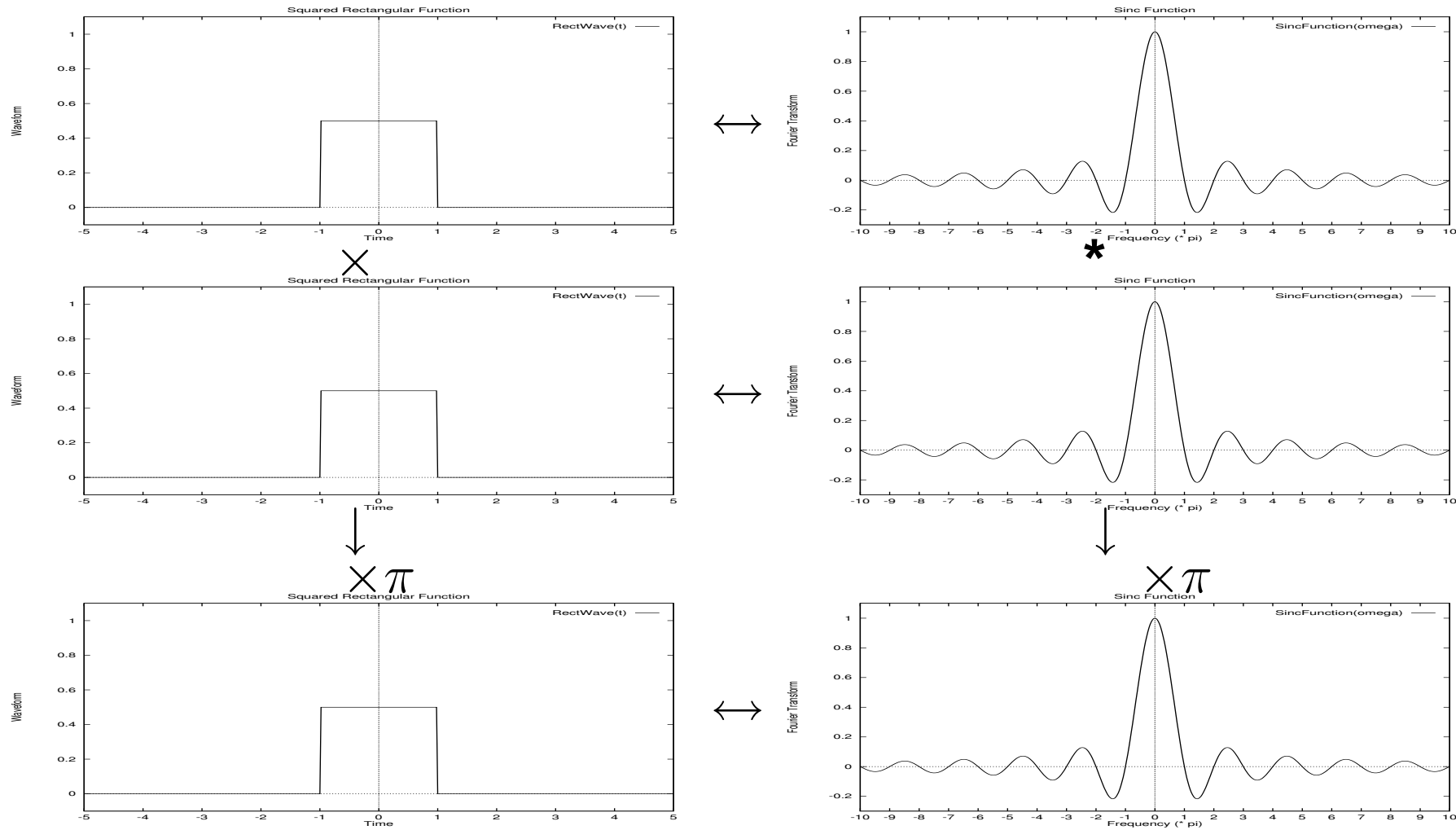


アップ/ダウン・サンプリングにおいて重要



例題: sinc 関数同士の畳み込み

例題: sinc 関数同士の畳み込みは? (畳み込み・乗算の応用)

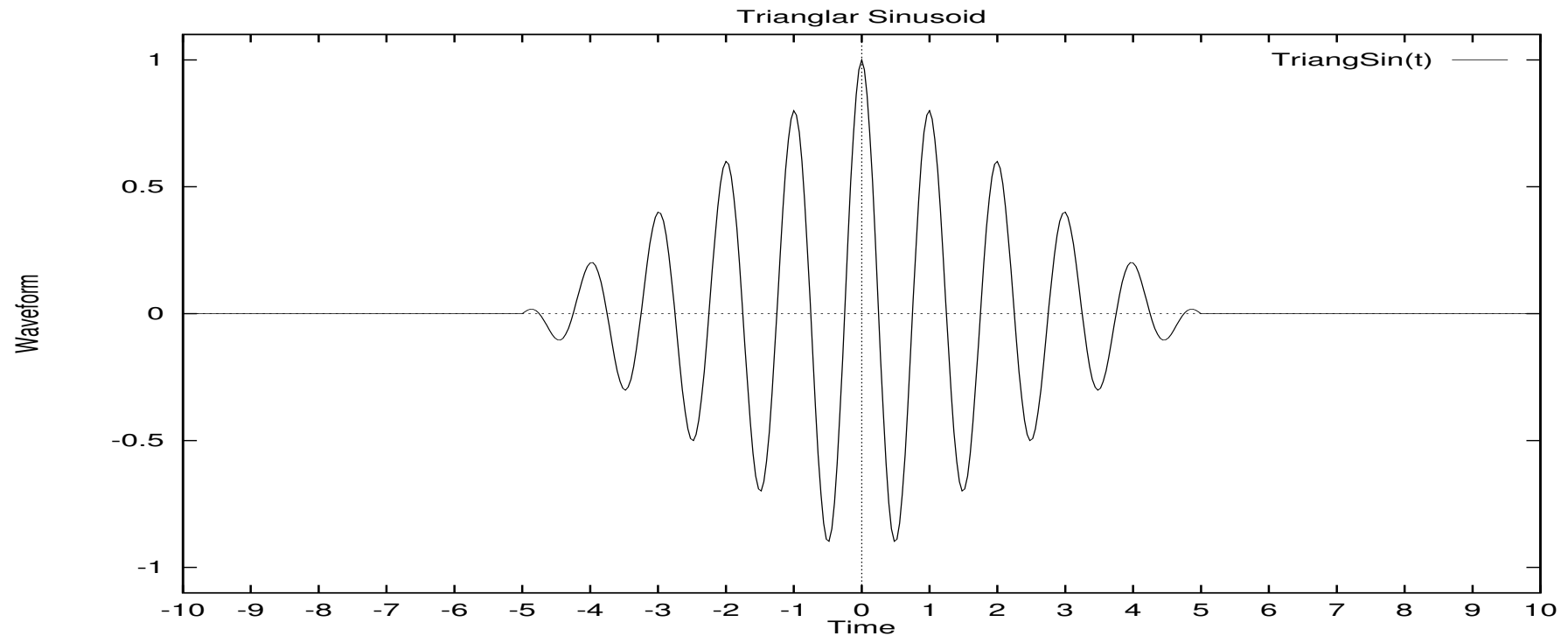


$$\text{sinc } \omega * \text{sinc } \omega = 2\pi \mathcal{F} [\text{rect}_1(t)/2 \cdot \text{rect}_1(t)/2] = \pi \mathcal{F} [\text{rect}_1(t)/2] = \text{sinc } \omega$$



演習: 三角包絡正弦波のフーリエスペクトル

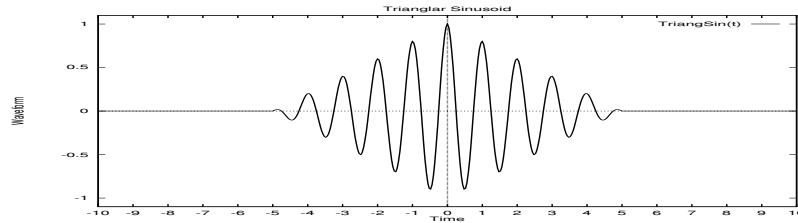
- 例題: 三角包絡正弦波のフーリエスペクトルは? (畳み込み・乗算の応用)



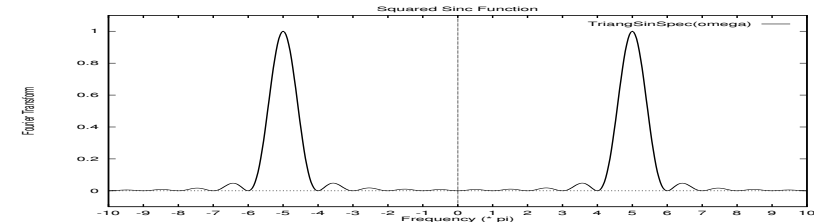


演習：三角包絡正弦波のフーリエスペクトル

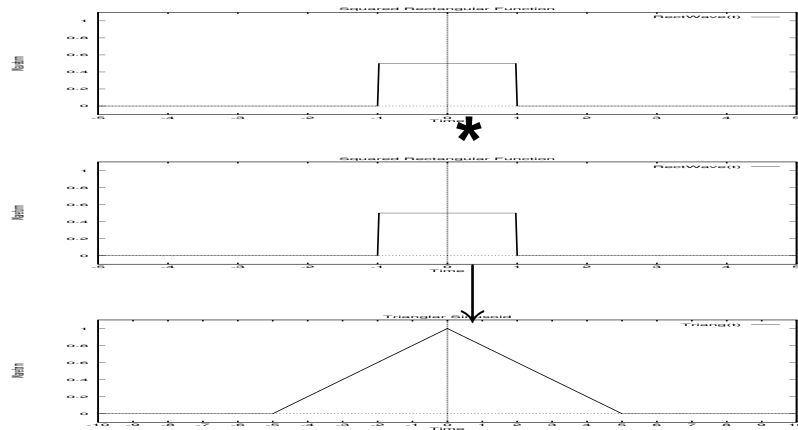
■ 例題：三角包絡正弦波のフーリエスペクトルは？ (畳み込み・乗算の応用)



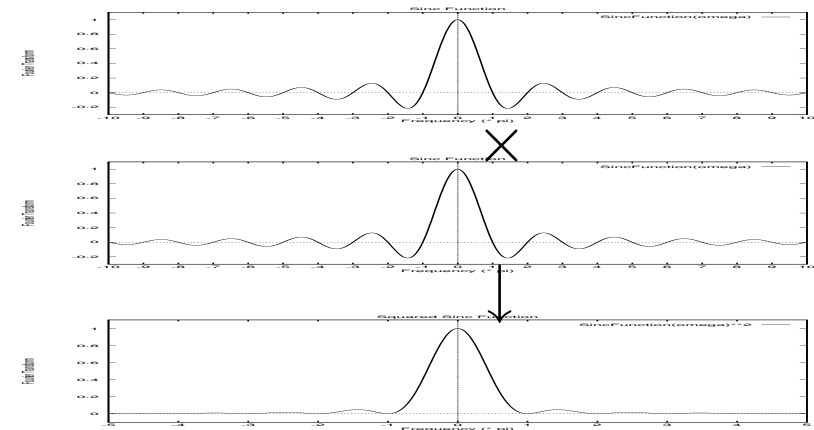
↔



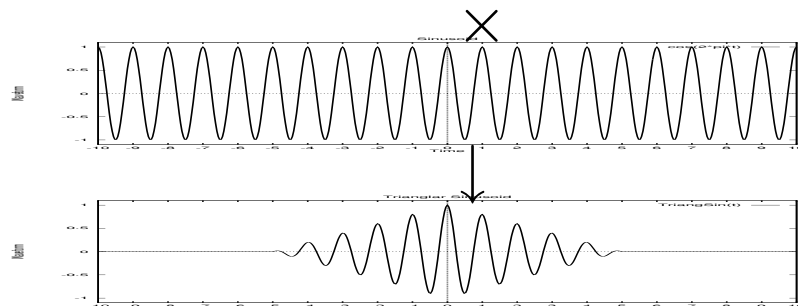
■ 窓関数 (畳み込み)



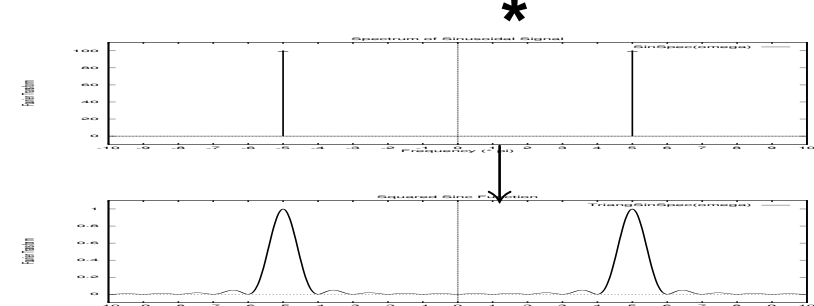
↔



■ 変調 (乗算)



↔





Dirac のデルタ関数 (単位インパルス関数)

■ 定義

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t) dt = \phi(0)$$

あるいは、

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & (t \neq 0) \\ \infty, & (t = 0) \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1, \quad (\epsilon > 0)$$

■ 超関数(distribution): 通常の意味の「関数」ではない。($\delta(0) = \infty$)

■ 主にテスト関数 $\phi(t)$ との内積で用いられる。(汎関数の定義域、超関数)

■ テスト関数: 無限回微分可能、 t の有限区間外では $\phi(0) = 0$

■ 実際の物理現象の説明に便利。

■ 不連続な関数の微分に適用可能。

例: Heaviside 単位ステップ関数の微分は、 $\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$



* デルタ関数に収束するさまざまな数列

- いろいろな数列の極限がデルタ関数。→ いろいろな応用できる。
面積1のまま、幅を0に。

- Gaussian パルスの極限

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{\pi t^2}{\tau^2}}$$

- 三角パルスの極限

$$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right), & |t| \leq \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}$$

- 指数パルスの極限

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\tau} e^{\frac{|t|}{\tau}}$$

- 標本化関数(sinc 関数)の極限

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(kt)}{\pi t} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \text{sinc}(kt)$$

- 2乗標本化関数(sinc² 関数)の極限

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \sin^2(t)}{\pi t^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \text{sinc}^2(t)$$



デルタ関数を含むフーリエ変換 (1/3)

■ デルタ関数のフーリエ変換

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \delta(t) dt = 1$$

■ 定数 A (つまり直流)のフーリエ変換

矩形パルス関数: $R_{\tau}(t) = 1$ ($\tau < 1/2$) **or** 0 ($\tau > 1/2$) を用いて、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[A] &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{F}[A \cdot R_{\tau}(t)] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} A\tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\ &= 2\pi A \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau/2}{\pi} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 2\pi A \delta(\omega) \end{aligned}$$

■ signum 関数: $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$ のフーリエ変換

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega}$$

(導出) Heaviside の単位ステップ関数を用いて、

$$\text{sgn}(t) = 2 \cdot u(t) - 1 = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at}(1)(t) - e^{at}(1)(-t)]$$

と書けるから、

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{-at} e^{-j\omega t} dt \right] = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} \right] = \frac{2}{j\omega}$$



デルタ関数を含むフーリエ変換 (2/3)

■ Heaviside 関数(単位ステップ関数) $u(t)$ のフーリエ変換

$$u(t) = \frac{1}{2}\{1 + \operatorname{sgn}(t)\} = \frac{1}{2}\{\mathcal{F}[1] + \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)]\}$$

により、

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$\cos(\Omega t), \sin(\Omega t)$ のフーリエ変換

$$\mathcal{F}[\cos(\Omega t)] = \pi[\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)]$$

$$\mathcal{F}[\sin(\Omega t)] = -j\pi[\delta(\omega - \Omega) - \delta(\omega + \Omega)]$$

(導出)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos(\Omega t)] &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{e^{-j(\omega - \Omega)t} + e^{-j(\omega + \Omega)t}}{2} dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-j(\omega - \Omega)t}}{-2j(\omega - \Omega)} + \frac{e^{-j(\omega + \Omega)t}}{-2j(\omega + \Omega)} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sin(\omega - \Omega)\tau/2}{(\omega - \Omega)} + \frac{\sin(\omega + \Omega)\tau/2}{(\omega + \Omega)} \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\sin(\omega - \Omega)\tau/2}{(\omega - \Omega)\tau/2} + \frac{\sin(\omega + \Omega)\tau/2}{(\omega + \Omega)\tau/2} \right\} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\tau}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \Omega)\tau}{2}\right) + \frac{\tau}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega + \Omega)\tau}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$



デルタ関数を含むフーリエ変換 (3/3)

■ $e^{j\Omega t}$ ($-\infty < t < \infty$) のフーリエ変換

$$\mathcal{F} [e^{j\Omega t}] = 2\pi \delta(\omega - \Omega)$$

$$\begin{aligned} \text{(導出)} \quad &= \mathcal{F} [\cos(\Omega t) + j \sin(\Omega t)] \\ &= \pi [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)] \end{aligned}$$

■ 周期関数 $f(t)$ のフーリエ変換

周期関数はフーリエ級数(係数を F_k とする)で表現できるから、

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\Omega t}$$

と書くと、

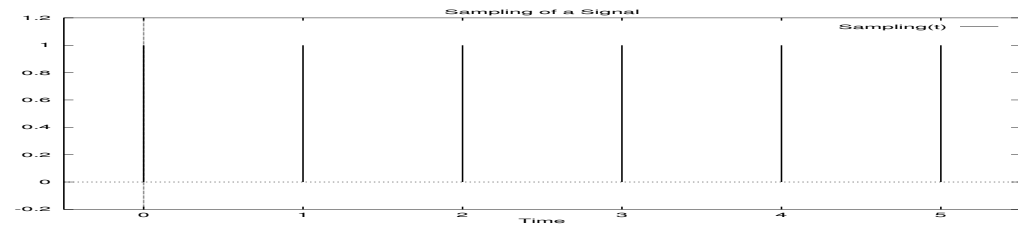
$$\mathcal{F} [f(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \mathcal{F} [e^{jk\Omega t}] = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \delta(\omega - k\Omega)$$



演習: インパルス列のフーリエ変換

■ 単位インパルス関数(デルタ関数) $\delta(t)$ を周期 T で並べた関数:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

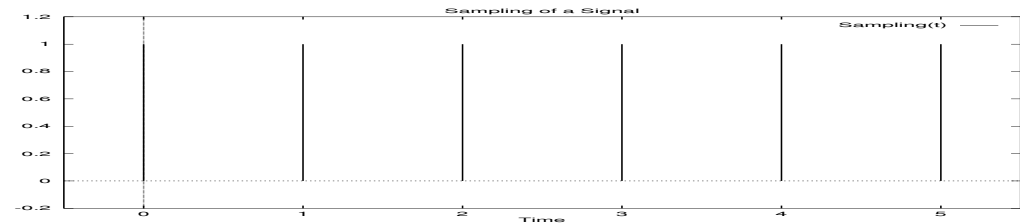




最重要 インパルス列のフーリエ変換

■ 単位インパルス関数(デルタ関数) $\delta(t)$ を周期 T で並べた関数:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

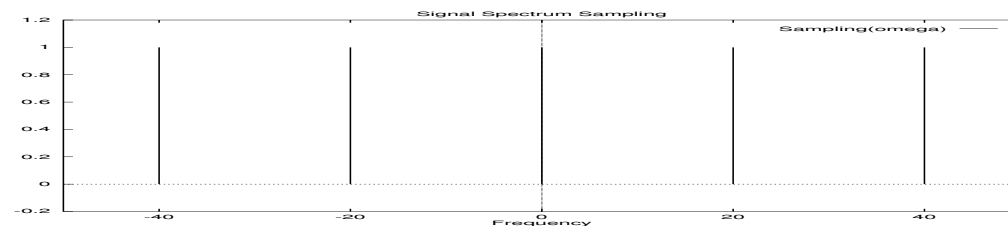


$\Omega = 2\pi/T$ とすると、フーリエ級数は、

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega t}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jk\Omega t} dt = \frac{1}{T}$$

だから、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta_T(t)] &= \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\Omega t} \right\} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(\omega - k\Omega)t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\mathbf{1}](\omega - k\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - k\Omega) = \Omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Omega) \\ &= \Omega \delta_\Omega(\omega) \end{aligned}$$



■ 「インパルス列のフーリエ変換はインパルス列」
→ 重要！ サンプリング定理の基礎



重要なフーリエ変換 (定常信号、時間対称信号)

t (時間) 領域表現	ω (周波数) 領域表現	意味
$\delta(t)$	1	Dirac のデルタ関数
1	$2\pi\delta(\omega)$	直流
$ t $	$\frac{-2}{\omega^2}$	
$\cos \Omega t$	$\pi[\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)]$	余弦波
$\sin \Omega t$	$-j\pi[\delta(\omega - \Omega) - \delta(\omega + \Omega)]$	正弦波
$\frac{W}{2\pi} \text{sinc} \frac{W}{2} t$	$\begin{cases} 1, & \omega < W/2 \\ 0, & \omega > W/2 \end{cases}$	sinc 関数



重要なフーリエ変換 ($t > 0$ のみの信号)

t (時間)領域表現	ω (周波数)領域表現	意味
$\begin{cases} 1, & t < \tau/2 \\ 0, & t > \tau/2 \end{cases}$	$\tau \operatorname{sinc} \frac{\tau}{2} \omega$	矩形パルス
$\begin{cases} 1 - \frac{ t }{\tau}, & t < \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$	$\tau \operatorname{sinc}^2 \frac{\tau}{2} \omega$	三角パルス (= 矩形パルス同士の畳み込み)
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	両側指数減衰
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}$	ガウス関数
$\delta_T(t)$	$\Omega \delta_\Omega(\omega) \quad \left(\Omega = \frac{2\pi}{T} \right)$	周期的インパルス列



重要なフーリエ変換 ($t > 0$ のみの信号)

t (時間) 領域表現	ω (周波数) 領域表現	意味
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	Heaviside の単位ステップ関数
$u(t) \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{a + j\omega}$	一次系のインパルス応答
$u(t) \cdot te^{-at}$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	臨界制動二次系のインパルス応答 (= 同一の一次系インパルス応答同士の畳み込み)
$u(t) \cdot \cos \Omega t$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] + \frac{j\omega}{\Omega^2 - \omega^2}$	余弦波右半分 (= $u(t)$ と余弦波の積 = ω 領域では畳み込み)
$u(t) \cdot \sin \Omega t$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \Omega) - \delta(\omega + \Omega)] + \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega^2}$	正弦波右半分 (= $u(t)$ と正弦波の積 = ω 領域では畳み込み)
$u(t) \cdot e^{-at} \sin \Omega t$	$\frac{\Omega}{(a + j\omega)^2 + \Omega^2}$	減衰正弦波 (= 一次系インパルス応答と正弦波の積 = ω 領域では畳み込み)



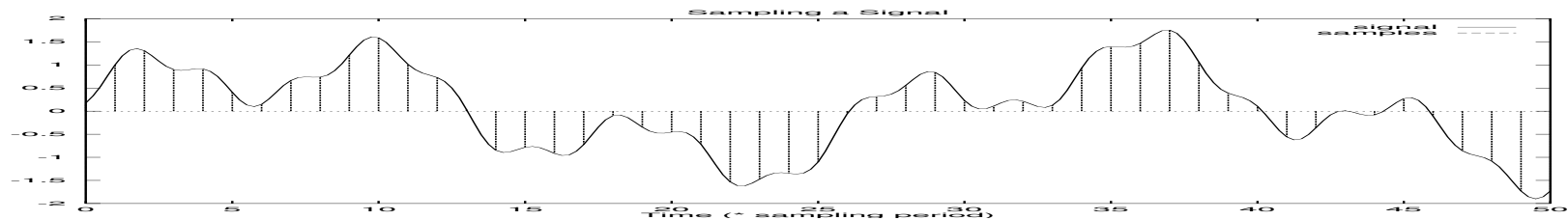
サンプリング定理

- サンプリング定理
- エリアシング、折り返し、Nyquist周波数
- リサンプリング

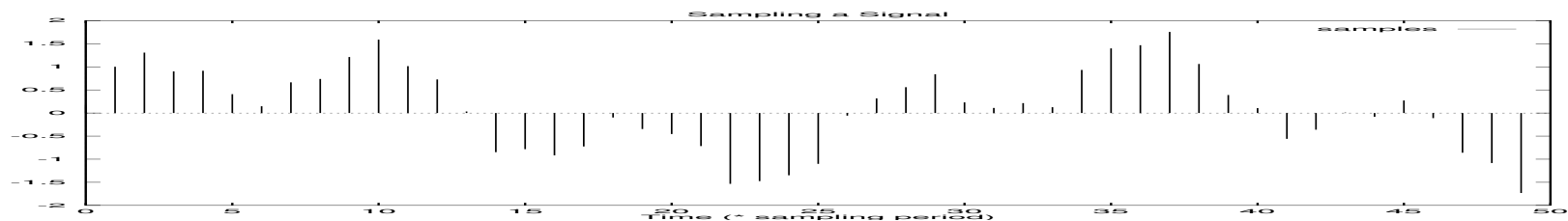


信号のサンプリング(標本化)と復元

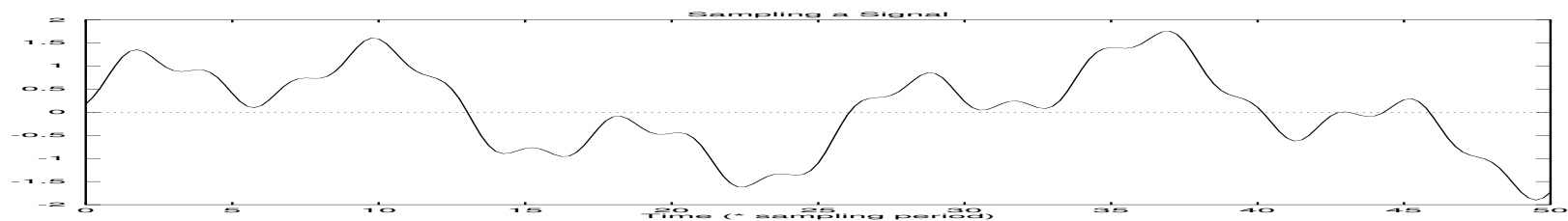
- 目的: デジタル信号処理、離散系への変換、etc.
- 信号 $f(t)$ から等しい間隔の標本(サンプル)列を取り出す。



■ サンプリング(標本化)



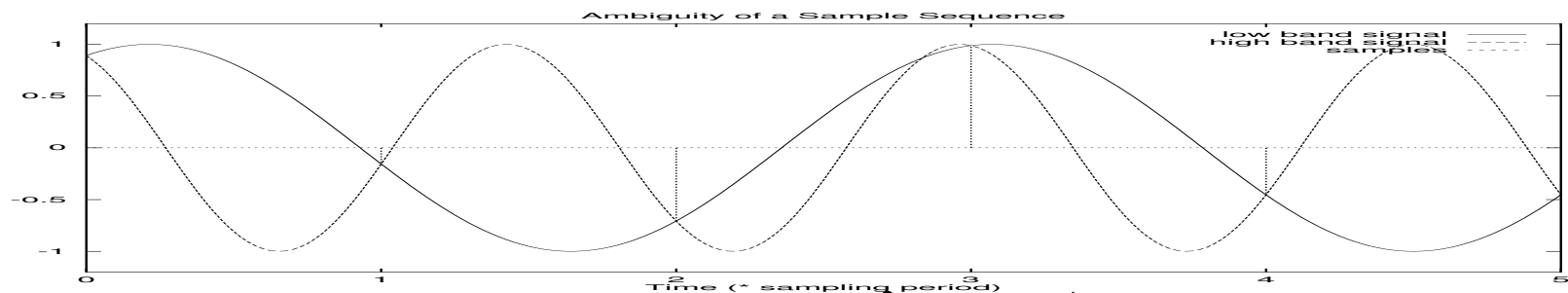
■ 信号復元



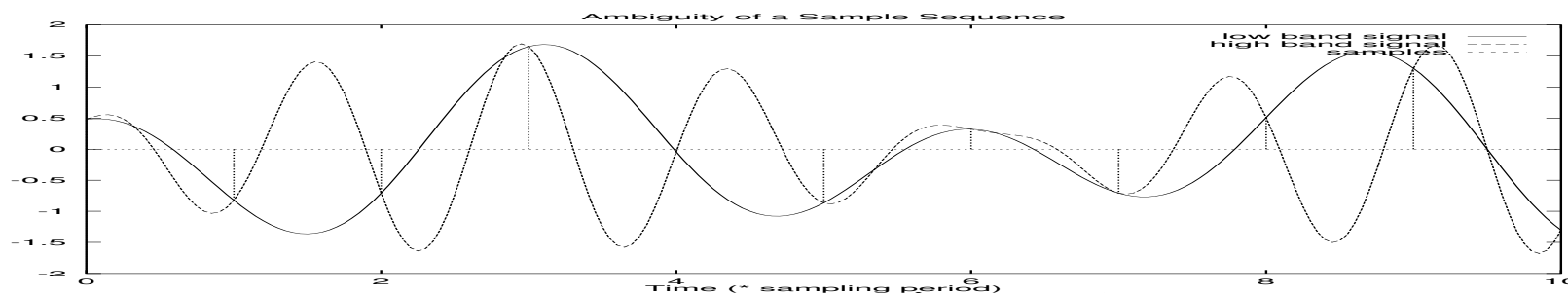


信号のサンプリング(標本化)と復元の問題

- 正確に復元できる(原情報の情報を保存している)サンプリングの条件は何か?
- サンプル値列の多義性



正弦波のサンプリング



一般信号のサンプリング

- 直感的サンプリング定理:
正弦波は1周期あたり、最低サンプル点2個必要。



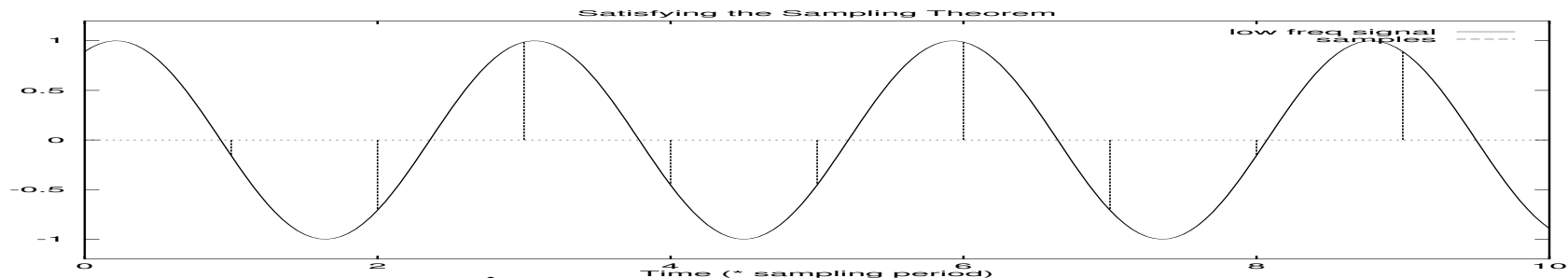
サンプリング(標本化)定理

■ 標本化定理

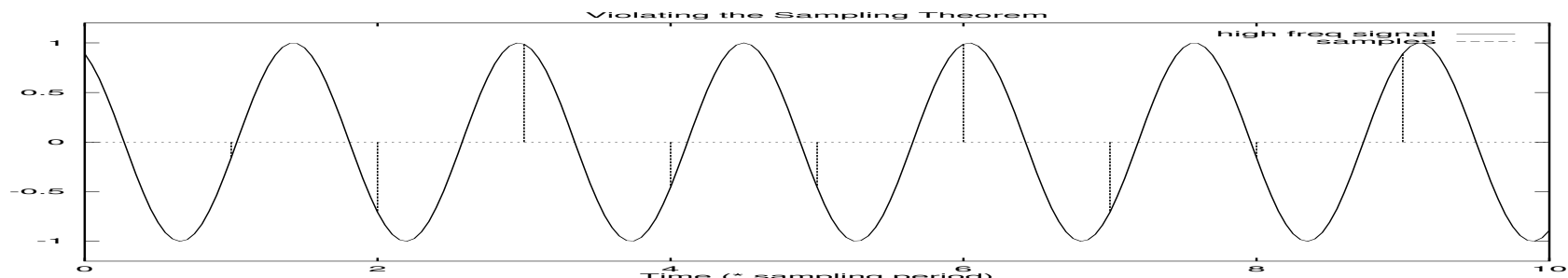
f_m [Hz]以上の周波数成分を持たない帯域制限信号 $f(t)$ は、 $1/2f_m$ [秒]より短い等しい間隔の標本(サンプル)で完全に決定される。

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| > \omega_m = 2\pi f_m \\ \text{any}, & |\omega| < \omega_m = 2\pi f_m \end{cases}$$

情報を失わずに連続データと離散データを相互に変換可能。



サンプリング定理を満たす正弦波

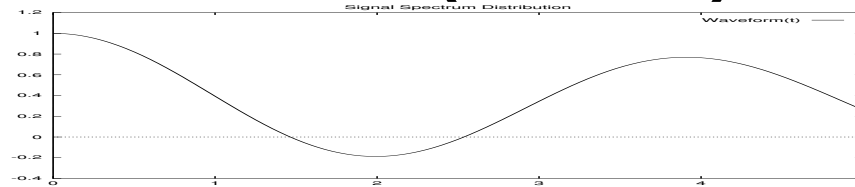


サンプリング定理を満たさない正弦波

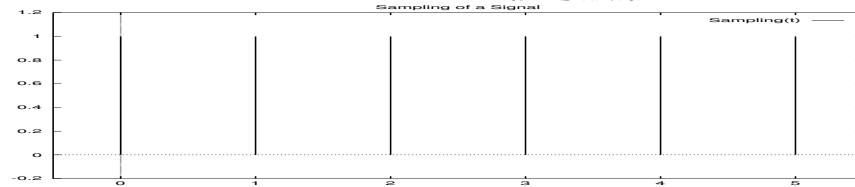


サンプリング定理 (図解)

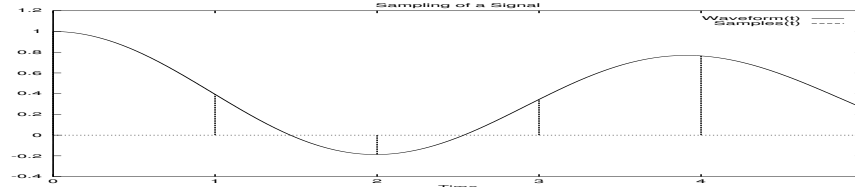
信号波形 (時間領域)



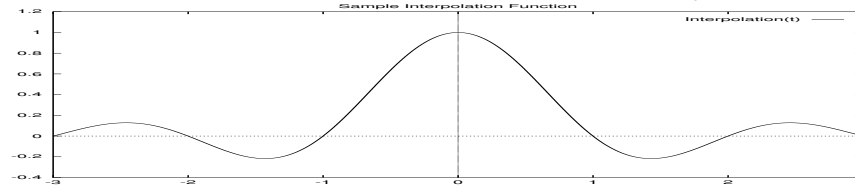
もとの信号波形とスペクトル。周波数帯域が制限されている。



サンプリングとは、信号波形にデルタ関数列を掛けることである。

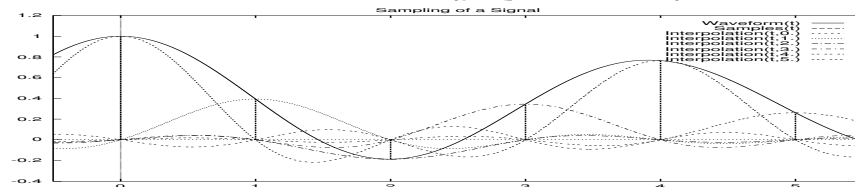


信号サンプル値倍のデルタ関数の列。そのスペクトルは原スペクトルとインパルス列の畳み込み。



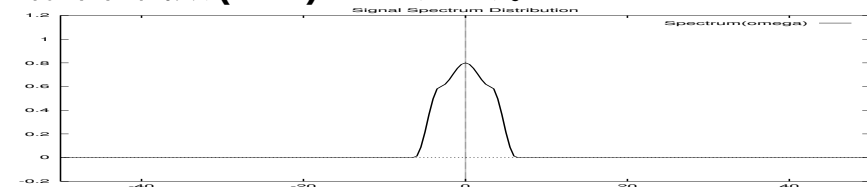
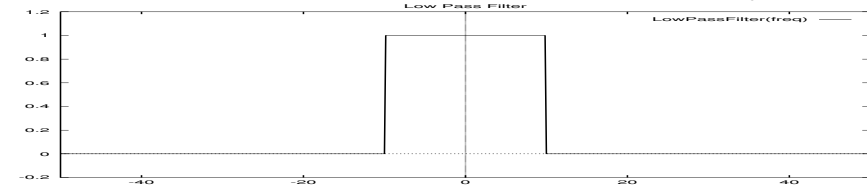
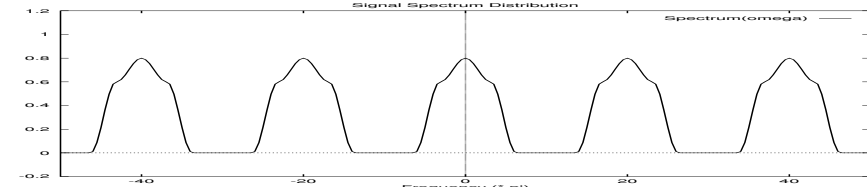
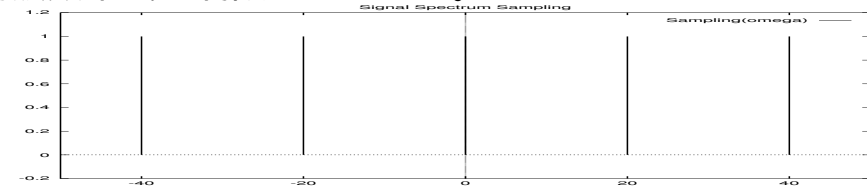
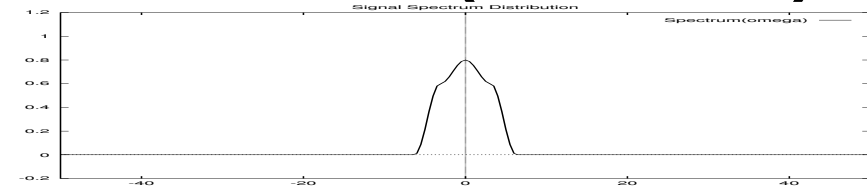
スペクトルに矩形を掛けて余分なスペクトルを除く。

これは信号サンプル値インパルス列と標本化関数 (sinc) の畳み込み。



こうしてもとの信号波形が完全に復元される。

スペクトル (周波数領域)

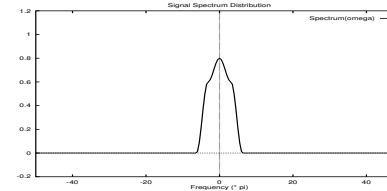




サンプリング定理の導出

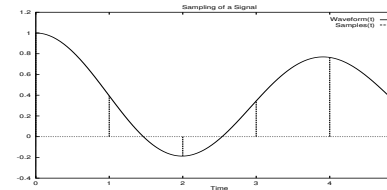
- 信号 $f(t)$ の帯域を Ω [rad/S] 以下に制限: $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ とすると、

$$F(\omega) = 0 \quad \text{where } |\omega| > \Omega$$



- $f(t)$ を間隔 $T \leq \frac{\Omega}{2\pi}$ でサンプリングした標本列信号 $f_T(t)$ は、

$$f_T(t) = f(t)\delta_T(t)$$



- $F_\Omega(\omega) = \mathcal{F}[f_T(t)]$, $\Omega = 2\pi/T$ とすると、

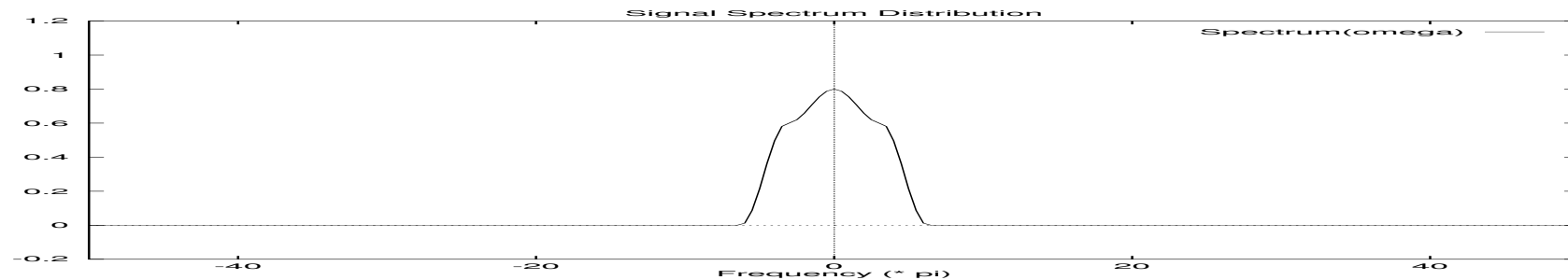
$$\begin{aligned} F_\Omega(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)\delta_T(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \mathcal{F}[\delta_T(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \{\Omega\delta_\Omega(\omega)\} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\delta_\Omega(\omega - \sigma)d\sigma \end{aligned}$$

$F_\Omega(\omega)$ は周波数領域で $F(\omega)$ を周期 Ω で並べたものとなる。



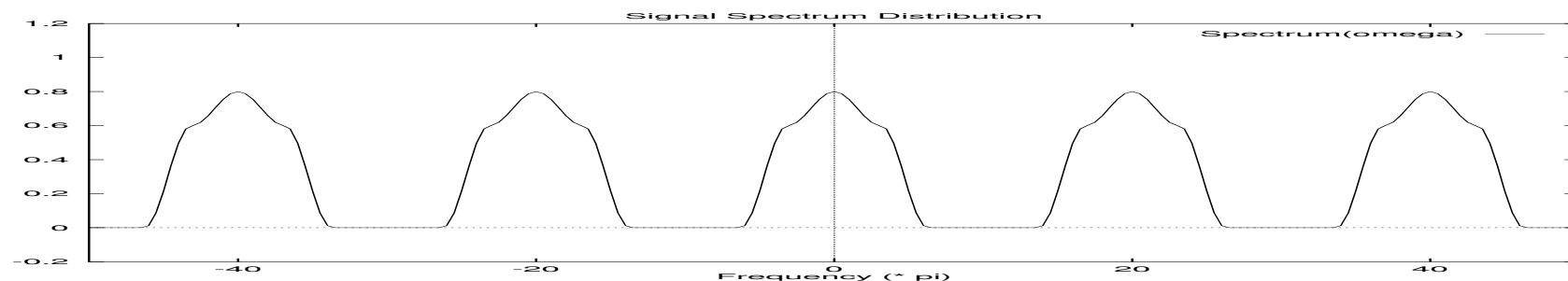
エリアシング

信号の帯域 (0 でないスペクトル成分の存在範囲): B 、



原信号スペクトル。帯域は B

サンプリング周波数 f_m でサンプリングしたサンプル値のインパルス列信号のスペクトルは、 f_m 間隔で繰り返しパターン。→ エリアシング (aliasing)



サンプリングによって生じるエリアシング

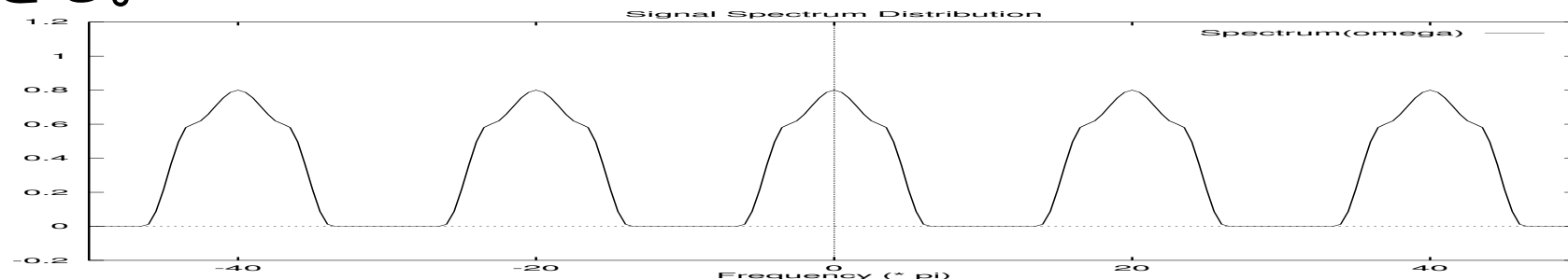


折り返し

Nyquist (ナイキスト) 周波数: $f_m = 2B$

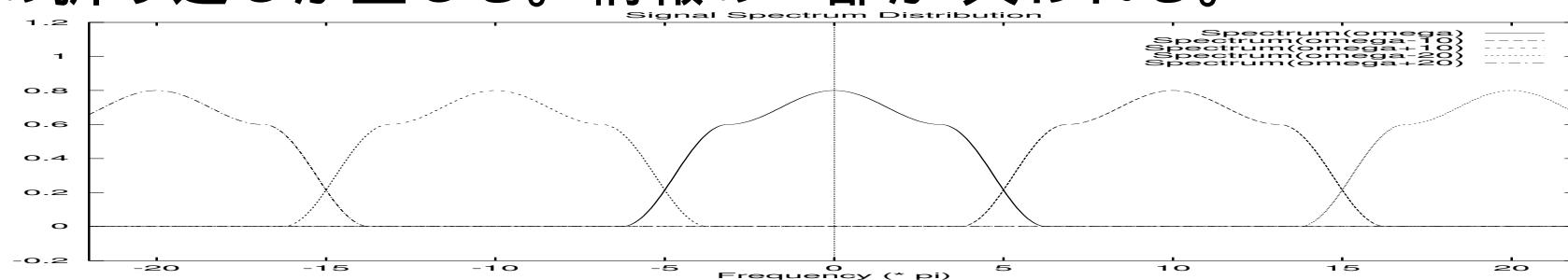
(Nyquist 間隔: $T = \frac{1}{2f_m}$ 、最大サンプリング周期)

- Nyquist 周波数以上の周波数でサンプリングすれば情報が保存できる。



折り返しのないサンプル列スペクトル

Nyquist 周波数未満の周波数でサンプリングすると、スペクトルの折り返しが生じる。情報の一部が失われる。



折り返しの生じたサンプル列スペクトル



サンプリング定理による波形の復元

- 原信号 $f(t)$ ($f_m = \Omega/2\pi$ 以下に帯域制限) をサンプル値系列 $f_T(t)$ (サンプル間隔 $T = 1/2f_m$) から復元するには?
- 周波数領域で、(rect_W は幅 W の矩形関数)

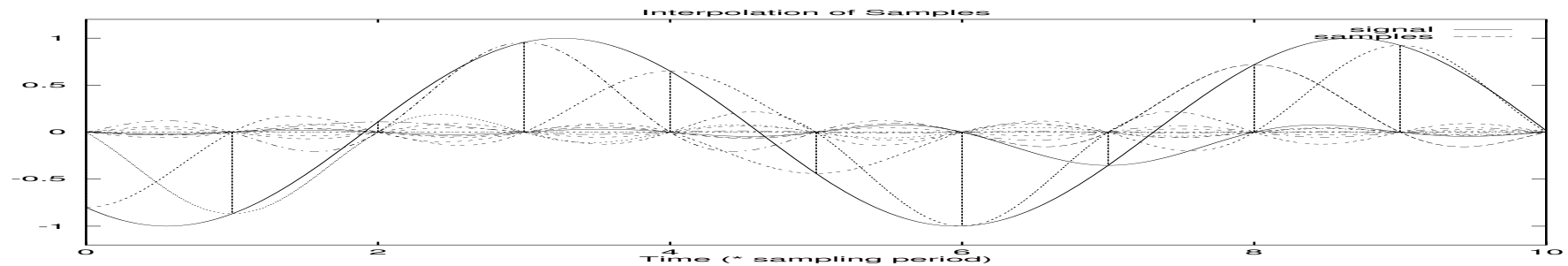
$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[T F_T(\omega) \text{rect}_{2\Omega}(\omega)] = T f_T(t) * \left\{ \frac{\Omega}{\pi} \text{sinc}(\Omega t) \right\} \\ &= f_T(t) * \text{sinc}(\Omega t) \end{aligned}$$

k 番目の標本値を f_k とすると $f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta(t - kT)$

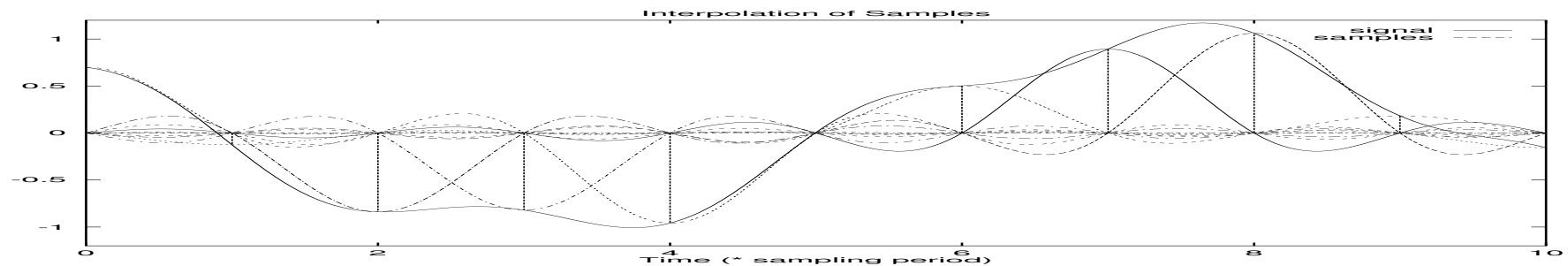
$$\begin{aligned} f(t) &= f_T(t) * \text{sinc}(\Omega t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta(s - kT) \text{sinc}(\Omega(t - s)) ds \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \text{sinc}(\Omega(t - kT)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \frac{\sin \Omega(t - kT)}{\Omega(t - kT)} \end{aligned}$$



サンプリング定理による波形の復元



サンプル値列から原信号の復元(正弦波の例)



サンプル値列から原信号の復元(一般信号の例)



周波数領域におけるサンプリング定理

- サンプリング定理は時間領域と周波数領域で双対性を持つ。

周波数領域のサンプリング定理:

時刻 $|t| > T$ [秒] で 0 となる時間制限信号 $f(t)$ は、 $1/2T$ [Hz] ($= \pi/T$ [rad/s]) より小さな当間隔の周波数スペクトルのサンプルで完全に決定できる。

- (導出) $|t| > T$ で $f(t) = 0$ より、 $T = \pi/\omega_0$ とすると、 $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$ だから

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{2T} \mathcal{F}[f(t)](k\omega_0) \end{aligned}$$

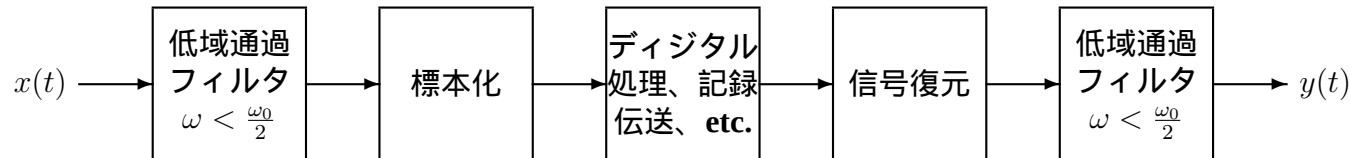
$\mathcal{F}[f(t)](k\omega_0) = F(k\omega_0)$ は、周波数領域で $\omega_0 = \pi/T$ [rad/s] 間隔のサンプル列。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \right\} e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ F(k\omega_0) \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-jk(\omega - \omega_0)t} dt \right\} \\ &= \int_{-T}^T F(k\omega_0) \frac{\sin(\omega - k\omega_0)T}{(\omega - k\omega_0)T} dt \end{aligned}$$



信号のサンプリングの手順

サンプリング周波数 Ω による信号のサンプリングと復元の実際



- 低域通過フィルタ (low-pass filter: LPF) により、周波数 $\omega_0/2$ 以上をカット。
- サンプリング周波数 ω_0 により信号をサンプリング。
- 目的のデジタル信号処理、デジタル記録、デジタル伝送などを行なう。
- サンプル値を並べて、インパルス列信号を生成。
- 低域通過フィルタ (low-pass filter: LPF) により、周波数 $\omega_0/2$ 以上をカット。



信号のリサンプリング

$x(t)$: 原信号, x_k : サンプル列,

Ω : サンプリグ周波数 $\rightarrow$ サンプリグ周波数 ω'_m への変換。

■ 目的/用途: デジタル系間の情報の適切な変換

例: CD(44.1kHz) と DAT(48kHz) の変換、画像の画素数の変換、その他あらゆるデジタル系接続。

■ 任意の時刻 t についての信号の補間計算

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \text{sinc } \Omega(t - kT) \quad (T \text{ はサンプリグ周期})$$

■ $\omega'_m > \Omega$ の場合 (アップサンプリグ)

新しいサンプリグ点における信号の補間計算 (サンプリグ周期 $T' = 2\pi/\omega'_m$)

$$x(iT') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \text{sinc } \Omega(iT' - kT)$$

■ $\omega'_m < \Omega$ の場合 (ダウンサンプリグ)

新しいサンプリグ点における信号の補間計算 (サンプリグ周期 $T' = 2\pi/\omega'_m$)

$$x(iT') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \text{sinc } \omega'_m(iT' - kT)$$



四種のフーリエ変換

■ 4つのタイプ

	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
時間	無限連続	有限連続	無限離散	有限離散
周波数	無限連続	無限離散	有限連続	有限離散



演習問題 1: 四種のフーリエ変換対の関係

1. 四種のフーリエ変換対のそれぞれについて、畳み込み定理を証明せよ。(ヒント: 畳み込みをどのように定義すれば、畳み込み定理が成立するか? [巡回畳み込み])
2. 連続信号の畳み込み結果をサンプリングしたものは、信号をサンプリングして得られた離散信号の畳み込み結果に等しいことを示せ。(無限長、有限長の両方について)

■ 動機: type 4 (DFT) は、FFT により高速計算可能。→ これを連続系にも利用したい。→ 連続系と離散系をつなぐ理論が必要。

■ 提出期限 :

12/01 12:00 (嵯峨山ポストに提出)



四種のフーリエ変換対

	t (時間) 領域表現	ω (周波数) 領域表現
(type 1) 無限連続 $\leftrightarrow$ 無限連続	無限長連続信号 $x(t)$, $-\infty < t < \infty$ $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	無限帯域連続スペクトル $X(\omega)$, $-\infty < \omega < \infty$ $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
(type 2) 有限連続 $\leftrightarrow$ 無限離散	有限長連続信号 $x(t)$, $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\frac{2\pi t}{T}}$ (周期的連続信号)	無限帯域離散スペクトル $\{X_k\}$, $k = -\infty, \dots, \infty$ $X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\frac{2\pi t}{T}} dt$ (整数倍周波数線スペクトル)
(type 3) 無限離散 $\leftrightarrow$ 有限連続	無限長離散信号 $\{x_t\}$, $t = -\infty, \dots, \infty$ $x_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ (時系列、サンプル値系列)	有限帯域連続スペクトル $X(\omega)$, $-\pi < \omega < \pi$ $X(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t e^{-j\omega t}$ (帯域スペクトル)
(type 4) 有限離散 $\leftrightarrow$ 有限離散	有限長離散信号 $\{x_t\}$, $t = 0, \dots, N-1$ $x_t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi k}{N}t}$ (有限長時系列、周期時系列)	有限帯域離散スペクトル $\{X_k\}$, $k = 0, \dots, N-1$ $X_k = \sum_{t=0}^{N-1} x_t e^{-j\frac{2\pi k}{N}t}$ (離散フーリエ変換)



四種のフーリエ変換対の関係

インパルス列のフーリエ変換で解釈すると ...

■ **type 1:** フーリエ積分 $f(t) \rightarrow F(\omega)$

■ **type 2:** フーリエ級数

- $f(t)$ の繰り返し = $f(t) * \delta_T(t) \rightarrow F(\omega) \cdot \delta_\Omega(\omega) = F(\omega)$ のサンプリング
- 有限長連続信号 $\rightarrow$ 無限長フーリエ係数列 (離散)

■ **type 3:** 時系列のフーリエ変換

- $f(t)$ のサンプリング = $f(t) \cdot \delta_T(t) \rightarrow F(\omega) * \delta_\Omega(\omega) = F(\omega)$ の繰り返し
- 無限時系列 (離散) $\rightarrow$ 有限区間 $(-\pi, \pi)$ の連続関数

■ **type 4:** 離散フーリエ変換

- $f(t)$ のサンプリングの繰り返し = $(f(t) \cdot \delta_T(t)) * \delta_S(t) \rightarrow (F(\omega) * \delta_\Omega(\omega)) \cdot \delta_\Sigma(\omega) = F(\omega)$ の繰り返しのサンプリング
- 有限長離散信号 $\rightarrow$ 有限長離散フーリエ変換



四種のフーリエ変換対

■ 4種のタイプ

- type 1: フーリエ積分、
- type 2: フーリエ級数、
- type 3: 時系列のフーリエ変換、
- type 4: 離散フーリエ変換

■ 線形性: すべての場合に成立。

■ 畳み込み定理 (時間、周波数): 場合により畳み込みの意味が異なる。

- 無限畳み込み — 無限長の関数 (系列) は、定義通りの畳み込み。
- 巡回畳み込み — 有限長の関数 (系列) は、周期関数 (系列) と考えて無限畳み込みする。

■ Parseval の定理

■ Wiener-Khintchine の定理: 場合により自己相関関数の意味が異なる。

■ サンプリング定理 (連続系と離散系をつなぐ)



四種のフーリエ変換対間の関係 (1/2)

	t (時間) 領域表現	ω (周波数) 領域表現
(type 1) 無限連続 $\longleftrightarrow$ 無限連続	無限長連続信号 $x(t) = \xi(t), -\infty < t < \infty$ $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} dt$	無限帯域連続スペクトル $X(\omega) = \Xi(\omega), -\infty < \omega < \infty$ $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} d\omega$
(type 2) 有限連続 $\longleftrightarrow$ 無限離散	周期的連続信号 $\begin{cases} x(t) = \xi(t), & t < T/2 \\ x(t \pm T) = x(t) \end{cases}$ $\Downarrow$ 有限長連続信号 $x(t), -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\frac{2\pi t}{T}}$	無限帯域スペクトルを等間隔 サンプリング $X(\omega) = \Xi(\omega) \delta_{\Omega}(\omega)$ $\Downarrow$ 無限帯域離散スペクトル $\{X_k\}, k = -\infty, \dots, \infty$ $X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\frac{2\pi t}{T}} dt$



四種のフーリエ変換対間の関係 (2/2)

	t (時間)領域表現	ω (周波数)領域表現
(type 3) 無限離散 $\longleftrightarrow$ 有限連続	無限長信号を等間隔サンプリング $x(t) = \xi(t) \delta_T(t)$ $\Downarrow$ 無限長離散信号 $\{x_t\}, \quad t = -\infty, \dots, \infty$ $x_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	周期的スペクトル $\begin{cases} X(\omega) = \Xi(\omega), & \omega < \Omega/2 \\ X(\omega) = X(\omega \pm \Omega) \end{cases}$ $\Downarrow$ 有限帯域連続スペクトル $X(\omega), \quad -\pi < \omega < \pi$ $X(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t e^{-j\omega t}$
(type 4) 有限離散 $\longleftrightarrow$ 有限離散	周期的信号をサンプリング $\begin{cases} \zeta(t) = \xi(t), & t < NT/2 \\ \zeta(t) = \zeta(t \pm NT) \\ x(t) = \zeta(t) \delta_T(t) \end{cases}$ $\Downarrow$ 有限長離散信号 $\{x_t\}, \quad t = 0, \dots, N-1$ $x_t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi k}{N}t}$	周期的スペクトルのサンプリング $\begin{cases} Z(\omega) = \Xi(\omega), & \omega < N\Omega/2 \\ Z(\omega) = Z(\omega \pm N\Omega) \\ X(\omega) = Z(\omega) \delta_\Omega(\omega) \end{cases}$ $\Downarrow$ 有限帯域離散スペクトル $\{X_k\}, \quad k = 0, \dots, N-1$ $X_k = \sum_{t=0}^{N-1} x_t e^{-j\frac{2\pi k}{N}t}$



信号のスペクトル

- Parseval の定理、自己相関関数、相互相関関数
- 信号のパワースペクトル
- Wiener-Khinchine の定理、クロススペクトル
- 4種のフーリエ変換対



フーリエ変換における Parseval の定理

■ Parseval の定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

t 領域の総エネルギー ω 領域の総エネルギー

● 導出

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} \\ &= \mathcal{F}[f(t) f^*(t)] \Big|_{\omega=0} \\ &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F^*(\omega) \Big|_{\omega=0} \quad (\text{周波数畳み込み}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) F(\omega - \sigma) d\sigma \Big|_{\omega=0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) F(-\sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) F^*(\sigma) d\sigma = \text{右辺} \end{aligned}$$

QED



フーリエ変換における Parseval の定理の意味

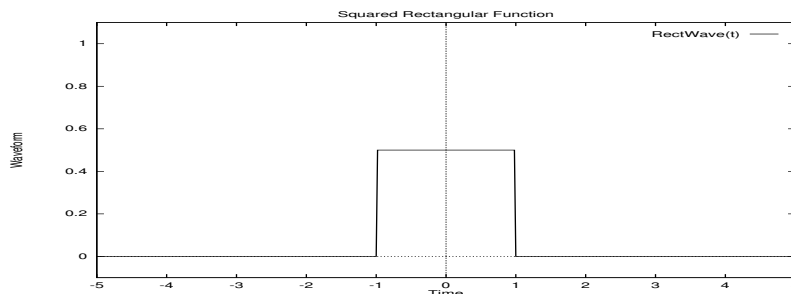
■ 信号間の距離: t 領域でも ω 領域でも同じ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega) - G(\omega)|^2 d\omega$$

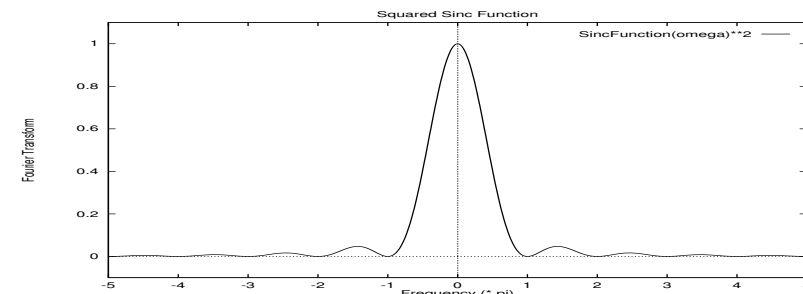
t 領域の二乗距離
 ω 領域の二乗距離

■ エネルギースペクトル: $|F(\omega)|^2$ (時間当たりならばパワースペクトル)

$f(t)$ のエネルギーは $\omega \sim \omega + d\omega$ の間に、 $\frac{|F(\omega)|^2 d\omega}{2\pi}$ の割合で分布



信号波形



エネルギースペクトル



自己相関関数と相互相関関数

■ 相互相関関数 (cross-correlation function) $\phi_{xy}(\tau)$

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t - \tau)dt$$

- 信号 $y(t)$ を τ だけずらして、信号 $x(t)$ との内積を取ったもの。
- $x(t)$ と $y(t)$ の内積 (=類似度) を τ の関数として定義
- すべての τ について $\phi(\tau) = 0$ ならば、 $x(t)$ と $y(t)$ は無相関
- 畳み込みとしての解釈: $\phi_{xy}(\tau) = [x(t) * y(-t)](\tau)$
- 相互相関関数の性質: $\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau)$

■ 自己相関関数 (autocorrelation function) $\phi_{xx}(\tau)$

- $x(t) = y(t)$ の場合の相互相関関数
- τ の偶関数: $\phi_{xx}(\tau) = \phi_{xx}(-\tau)$
- 例: 白色雑音の自己相関関数は $\delta(\tau)$

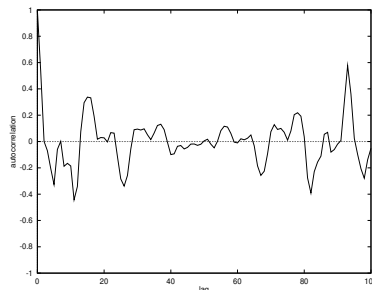
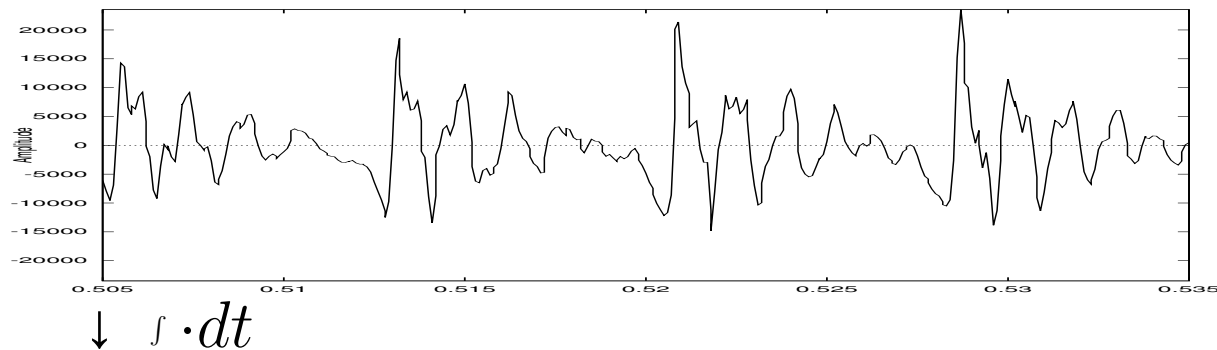
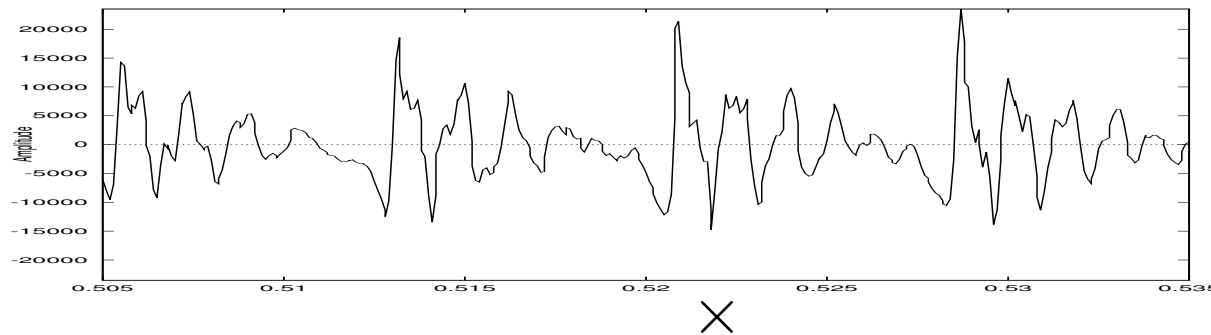
■ 畳み込み: $y(t) = x(t) * h(t)$ ならば、

$$\phi_{xx}(\tau) * h(\tau) = \phi_{xy}(\tau), \quad \phi_{xy}(\tau) * h(\tau) = \phi_{yy}(\tau)$$



自己相関関数の例

■ 音声信号 $f(t)$ /koshiraeru/ 中の母音 /a/ (0.52sec 付近) 短時間自己相関関数



自己相関関数 $\phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t - \tau)dt$



Wiener-Khintchine の定理

■ Wiener-Khintchine (ウィーナー・ヒンチン) の定理:

自己相関関数とパワースペクトルはフーリエ変換対をなす。

$$\begin{array}{cc} \text{パワースペクトル} & \text{自己相関関数} \\ \Phi_{xx}(\omega) & = \mathcal{F} [\phi_{xx}(\tau)] \end{array}$$

(導出) エネルギースペクトルの場合

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} [|F(\omega)|^2] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ F^*(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f(\tau) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-\omega) e^{-j\omega(\tau-t)} d\omega \right\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f(\tau) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') e^{j\omega'(\tau-t)} d\omega' \right\} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(\tau - t) d\tau \end{aligned}$$

一般の不規則信号の場合は、数学的に高度。省略。

■ 調和解析と一般調和解析の話

■ 調和解析

周期信号・有限長信号のフーリエ解析、スペクトル解析

■ 一般調和解析 (N. Wiener)

定常不規則 (ランダム) 信号のスペクトル解析

予測理論



クロススペクトル、短時間スペクトル

■ パワースペクトル (power spectrum):

$$\Phi_{xx}(\omega) = \mathcal{F} [\phi_{xx}(\tau)]$$

クロススペクトル (cross spectrum):

$$\Phi_{xy}(\omega) = \mathcal{F} [\phi_{xy}(\tau)]$$

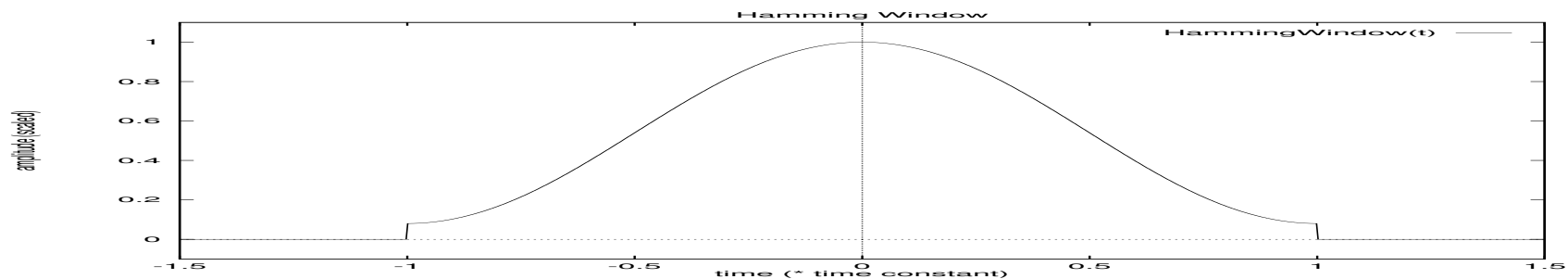
■ 短時間相関関数、短時間パワースペクトル

$$\tilde{x}(t) = w(t)x(t), \quad \text{窓関数: } w(t) = \begin{cases} > 0, & |t - t_0| < T/2 \\ = 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tilde{\phi}_{xx}(\tau) = \phi_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tau) \quad \text{短時間相関関数}$$

$$\tilde{\Phi}_{xx}(\omega) = \mathcal{F} [\tilde{\phi}_{xx}(\tau)] \quad \text{短時間パワースペクトル}$$

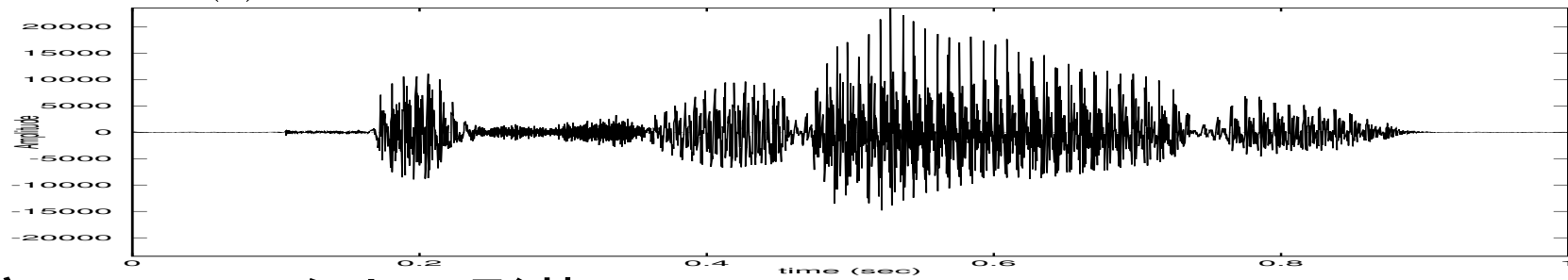
■ 窓関数の例: Hamming 窓



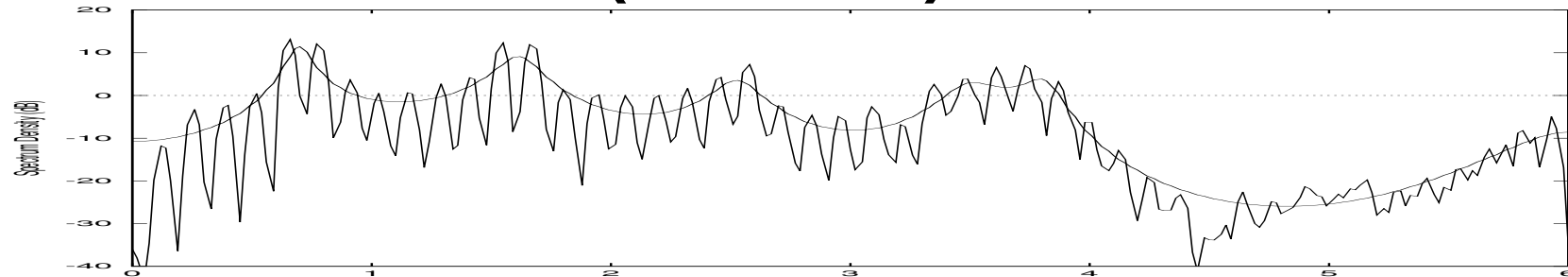


音声信号のスペクトルの例

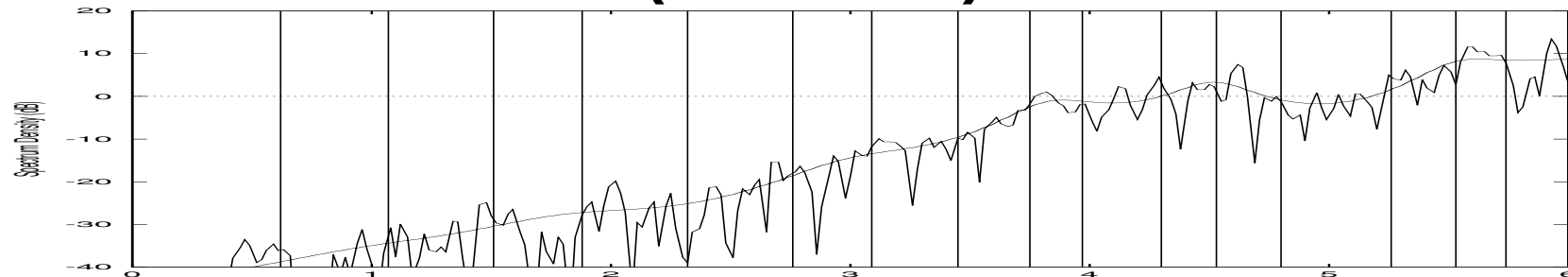
■ 音声信号 $x(t)$ /koshiraeru/ の波形



■ 母音/a/のスペクトル形状 (at 0.52sec)



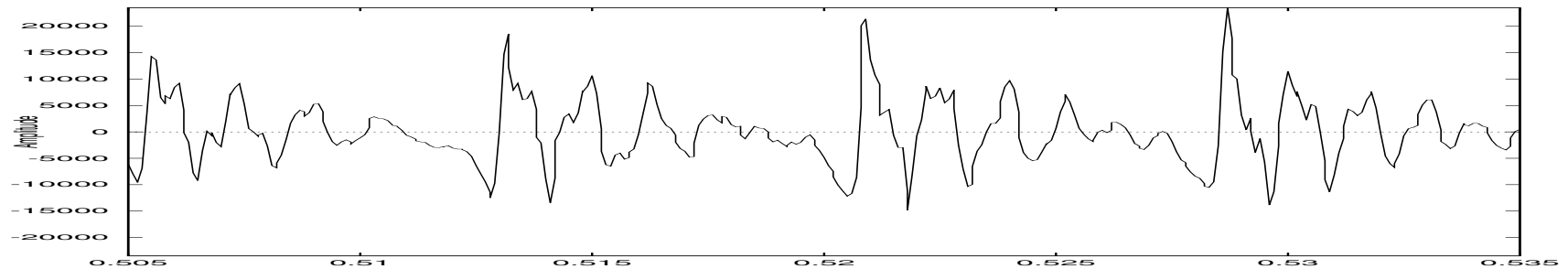
■ 子音/sh/のスペクトル形状 (at 0.30sec)



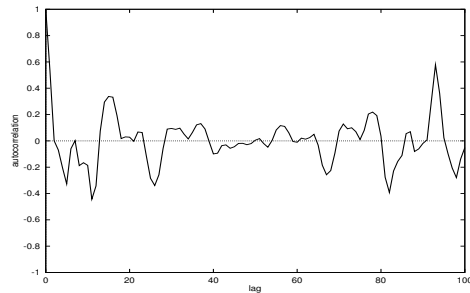


音声信号のスペクトルと自己相関関数の例

■ 音声信号 $f(t)$ /koshiraeru/ 中の母音 /a/ (0.52sec 付近)



■ 自己相関関数 (低次のみ表示)



スペクトル

